Spé Maths Terminale	**Chapitre II : Combinatoire et dénombrement**	2020/2021

0) Rappels sur les ensembles :

Définitions et notations :

a) On considère un ensemble E

Soit x, un élément de E, on note : **$x \in E$**

Si y n'est pas un élément de E, **$y \notin E$**

b) Soit F une partie d'un ensemble E, on dit que **F est contenue dans E** (ou F est incluse dans E) et on note : $F \subset E$

C'est-à-dire : si $x \in F$, alors $x \in E$, mais la réciproque est fausse.

c) Les ensembles de nombres : (voir cours actuel de Seconde)

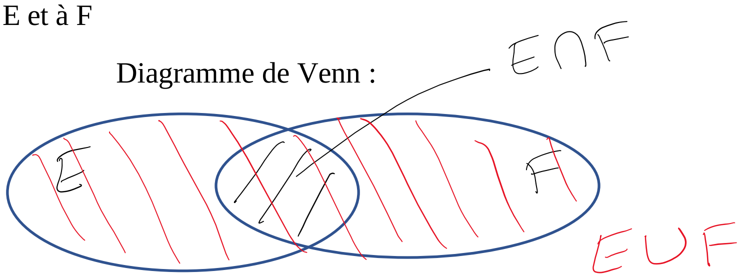
$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

d) Soient deux ensembles E et F.

- **La réunion des ensembles E et F** (notée : $E \cup F$) désigne l'ensemble des éléments appartenant à E ou à F

- **L'intersection des ensembles E et F** (notée : $E \cap F$) désigne l'ensemble des éléments appartenant à la fois à E et à F

Diagramme de Venn :



- E et F sont dits **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun. Notation : $E \cap F = \emptyset$

I) Cardinal d'un ensemble fini :

1) Définition :

Soit n, un entier naturel non-nul.

On considère un ensemble E possédant n éléments. (On dit que E est un **ensemble fini**)

Le nombre n d'éléments de E s'appelle **le cardinal de E.**

Notation : Card (E)

Remarques :

- $\text{Card}(\emptyset) = 0$

- Certains ensembles ne sont pas finis : $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$, etc…

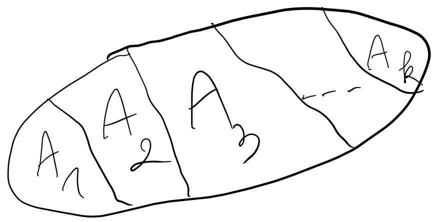
2) Principe additif :

Soit k, un entier naturel non-nul.

Considérons A_1, A_2 ,…, A_k, k ensembles deux à deux disjoints.

Alors :

$$\boxed{Card(A_1 \cup A_2 \ldots A_k) = Card(A_1) + Card(A_2) + \ldots + Card(A_k)}$$



Exemple :

On considère E = {a ;b ;c ;d ;e ;f}   et F = {g ;h}

$E \cap F = \varnothing$, autrement dit E et F sont disjoints.

$E \cup F$ = {a ;b ;c ;d ;e ;f ; g ;h}

Card ($E \cup F$) = Card (E) + Card(F) = 6 + 2 = 8

3) Principe multiplicatif :

a) Cas de deux ensembles :

On considère deux ensembles E et F, non vides.

Le produit cartésien de E par F, noté E×F (se lit « E croix F) est l'ensemble de tous les couples (x ;y) avec $x \in E$ et $y \in F$

Si E et F sont des ensembles finis,

$$\boxed{Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)}$$

Exemple :
Si E = {a ;b ;c ;d}   F = {e ;f}
E×F = {(a ;e) ;(a ;f) ;(b ;e) ;(b ;f) ;(c ;e) ;(c ;f) ;(d ;e) ;(d ;f)}

Card(E×F) = Card(E) × Card(F) = 4 × 2 = 8

Exemple classique : les coordonnées d'un point du plan
Soit un point A de coordonnées (x ;y)
$x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.   (x ;y) est un couple de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

b) Généralisation à k ensembles, k entier supérieur à deux :

Soit k, un entier naturel ≥ 2, on note E_1, E_2, …, E_k , k ensembles non vides.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_k$ est constitué d'éléments notés $(x_1 ; x_2 ; x_3 ; \ldots ; x_k)$ avec

$x_i \in E_i$, pour tout $i \in \{1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; k\}$

Si les $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sont tous finis, alors :

$$\boxed{\text{Card}(E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \text{Card}(E_3) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)}$$

Exemple classique :

Dans l'espace de dimension 3, muni d'un repère, on peut noter $(x ; y ; z)$ les coordonnées d'un point.

$(x ; y ; z)$ est appelé un **triplet**

II) K-uplet d'un ensemble fini :

1) Définition :

On considère un ensemble $E \neq \varnothing$.

$k \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **k-uplet** (ou k-liste) d'éléments de E, tout élément du produit cartésien $E^k = E \times E \times \ldots \times E$ (k ensembles E)

Remarque : chaque k-uplet est une liste ordonnée (On peut penser aux coordonnées d'un point)

Exemple :

Si on considère les lettres du mot FONCTION, (C,T,O,I) est un 4-uplet de cet ensemble.

2) Théorème :

Soient n et k, deux entiers naturels non nuls. On considère un ensemble E tel que Card(E) = n.

Le nombre de k-uplets de E est n^k.

Autrement dit : $\text{Card}(E^k) = n^k$

Démonstration :

Exemple :

On considère quatre boîtes que l'on note : B_1, B_2, B_3, B_4 et six jetons notés J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6

Les différents rangements possibles des jetons dans les boîtes sont des six-uplets.

Par exemple : $(B_1 ; B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_3 ; B_4)$ est un de ces six-uplets

Il correspond au fait de placer le premier et le deuxième jetons dans la boîte B_1, le troisième dans la B_2, le quatrième et le cinquième dans la B_3 et le dernier dans la B_4

On peut alors dénombrer en tout $4^6 = 4096$ rangements possibles.

3) <u>**Théorème :**</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, k, un entier naturel tel que : $1 \leq k \leq n$
On considère un ensemble E tel que Card(E) = n.
Le nombre de k-uplets d'éléments **deux à deux distincts** de l'ensemble E est :

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)}$$

(il y a k facteurs)

<u>Définition :</u>

Un k-uplet d'éléments deux à deux distincts est appelé <u>**un arrangement de k éléments de E**</u> ou un <u>**k-arrangement.**</u>

<u>**Remarque :**</u>

*Un k-arrangement de E peut être vu comme un tirage <u>**avec ordre**</u> et <u>**sans remise**</u> des éléments de E*

<u>Exemple :</u>

Il y a vingt participants à une compétition sportive.
A la fin, on établit un classement des trois premiers. Il n'y a pas d'ex aequo.
Combien peut-on faire de podiums en tout ?

Un podium est <u>un triplet d'éléments distincts de l'ensemble de tous les participants</u>.
Pour la première place, il y a 20 possibilités, puis 19 pour la deuxième place et 18 pour la troisième place.

Le nombre de podiums possibles est $20 \times 19 \times 18 = \underline{6\,840}$
(=nbre de 3-arrangements d'un ensemble à 20 éléments)

4) <u>**Définition :**</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble tel que Card(E) = n

Tout n-uplet d'éléments de E deux à deux distincts est appelé <u>**une permutation**</u> de l'ensemble E.

<u>Exemple :</u>

Si $E = \{x_1 ; x_2 ; x_3\}$

Les permutations de l'ensemble E sont :

$(x_1 ; x_2 ; x_3), (x_1 ; x_3 ; x_2), (x_2 ; x_1 ; x_3), (x_2 ; x_3 ; x_1), (x_3 ; x_1 ; x_2), (x_3 ; x_2 ; x_1)$

(il y en a six)

5) <u>**Théorème :**</u>

Soit E un ensemble tel que Card(E) = n ($n \in \mathbb{N}^*$).

<u>Le nombre de permutations de l'ensemble E</u> est $\mathbf{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots . \times 2 \times 1}$

Notation : On note $n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots . \times 2 \times 1$

n ! se lit « factorielle n » ou « n factorielle »

Convention : $0\,! = 1$

Avec l'exemple précédent : Si $E = \{x_1\,;x_2\,;x_3\}$, alors le nombre de permutations est $3\,! = 1\times2\times3 = 6$

Remarque sur le nombre de k-arrangements d'un ensemble à n éléments (dans la partie 3)) :

En utilisant la notation factorielle, le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments est donc égal à :

$$\frac{n\,!}{(n-k)\,!}$$

Dans l'exemple des podiums de la compétition sportive vue précédemment :

Nombre de 3-arrangements dans un ensemble à 20 éléments : $\frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18$

III) Parties d'un ensemble et combinaisons :

1) Nombre de parties d'un ensemble :

ATTENTION : Il ne faut pas confondre des parties d'un ensemble avec des k-uplets de ce même ensemble.

Exemple : (a;b) et (b;a) sont des couples distincts (penser aux coordonnées d'un point dans le plan)

Mais $\{a;b\} = \{b;a\}$ est une partie à deux éléments. (L'ordre n'intervient pas ici)

Théorème :

On considère un ensemble E tel que Card(E) = n (avec $n\in\mathbb{N}^*$)

Le nombre de parties de E est 2^n

Exemple :

Soit $E = \{a\,;b\,;c\}$

Les parties de E sont :

$$\varnothing,\ E,\ \{a\},\{b\},\{c\},\{a\,;b\}\,;\{a\,;c\},\{b\,;c\}$$

Il y en a $2^3 = 8$

2) Combinaisons :

a) Définition :

On considère un ensemble E tel que Card(E) = n (avec $n\in\mathbb{N}^*$)

Soit k, un entier naturel tel que : $0 \le k \le n$

Toute partie de E ayant k éléments est appelée **une combinaison de k éléments de E**.

Remarque : L'ordre des éléments n'intervient pas dans une combinaison.

Exemple :

Dans une assemblée de 15 personnes, on souhaite former des groupes de 5 personnes. Chaque groupe est donc une combinaison de 5 éléments de l'ensemble de l'assemblée.

b) Propriété :

Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$)

Se note $\binom{n}{k}$ (se lit « k parmi n ») et se calcule par la formule : $\frac{n!}{k! \times (n-k)!}$

Exemple :

Dans l'exemple précédent, le nombre de groupes de 5 personnes est donc donné par :

$\binom{15}{5} = \frac{15\,!}{5\,! \times (15-5)\,!} = \frac{\cancel{15} \times \overset{7}{\cancel{14}} \times 13 \times \overset{3}{\cancel{12}} \times 11}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 7 \times 3 \times 13 \times 11$ = 3 003.

Quelques cas particuliers :

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$\binom{n}{0} = 1$. Autrement dit : Dans un ensemble à n éléments, il n'y a qu'une seule partie à aucun élément = l'ensemble vide.

$\binom{n}{1} = n$. Autrement dit : Dans un ensemble à n éléments, il y a n parties à un seul élément

$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$. Autrement dit : Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n \times (n-1)}{2}$ parties à deux éléments

$\binom{n}{n} = 1$. Autrement dit : Dans un ensemble à n éléments, il n'y a qu'une seule partie à n éléments = l'ensemble lui-même.

Remarque :

Si on répète n fois de manière indépendante une même expérience aléatoire à deux issues : Succès / Echec et qu'on la modélise à l'aide d'un arbre pondéré, alors $\binom{n}{k}$ donnera le nombre de chemins dans l'arbre réalisant k succès. (avec $0 \leq k \leq n$) (voir plus tard les schémas de Bernoulli dans la loi binomiale)

c) Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et k, un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

Alors : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Démonstration :

Exemple :

$\binom{20}{7} = \binom{20}{13}$: Le nombre de façons de choisir 7 objets parmi 20 est le même que lorsqu'on choisit 13 parmi 20.

d) Propriété :

Soit n $\in\mathbb{N}$, alors : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration :

e) Relation et triangle de Pascal :

Soit n un entier naturel ≥ 2, et k un entier naturel tel que : $1 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration :

Triangle de Pascal (Blaise Pascal (1623-1662) : mathématicien français)

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Remarque :

A l'aide des coefficients $\binom{n}{k}$ appelés coefficients binomiaux, on peut calculer $(a + b)^n$,

pour tout $(a ;b) \in \mathbb{R}^2$

Formule du binôme de Newton : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (Isaac Newton(1642-1727) : Mathématicien et physicien anglais)

Exemple :

$$(a + b)^4 = \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$$

On utilise les coefficients du triangle de Pascal pour n = 4 : 1 4 6 4 1