Spé Maths Terminale	**Chapitre I : Suites et récurrence**	2020/2021

Prérequis de première S : *Suites (définition explicitement en fonction de n, définition par récurrence, représentation graphique des termes, suites arithmétiques, suites géométriques, sens de variation et comportement à l'infini)*

I) Rappels de Spé Maths Première sur les suites : Voir feuille de rappels

Revoir le chapitre consacré aux suites de Première S.

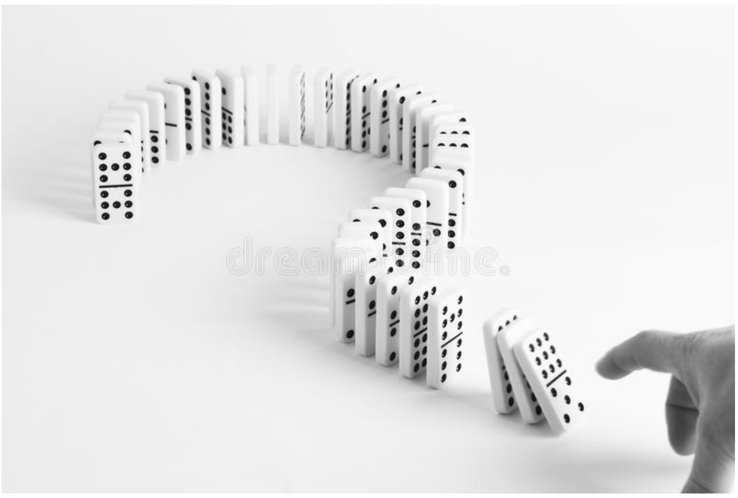
Problème : Pour s'entraîner…

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3
2) A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de la suite (u_n) ainsi que son comportement à l'infini.
3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$
   a) Montrer soigneusement que (v_n) est une suite géométrique. (On donnera son premier terme et sa raison)
   b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
4) Démontrer, si possible, les conjectures faites à la question 2)

II) Raisonnement par récurrence :

1) Idée : *la chute de dominos*



Quelles sont les deux conditions à remplir pour que tous les dominos tombent ?

a) ……………………………………………………………………

b) ……………………………………………………………………..

Remarques : - La première étape peut être qualifiée d'**………………………..** (elle fait démarrer tout le processus)

- La deuxième étape peut être qualifiée d'**……………………………**. (Le fait de « tomber » se transmet d'un domino au suivant)

2) Principe du raisonnement par récurrence en mathématiques :

On est amené parfois à démontrer des relations dépendantes d'un entier naturel n. On peut vérifier ces relations pour différentes valeurs de n mais ça ne constitue pas une preuve ferme et définitive du résultat. **Exemple :** la somme des n premiers carrés est égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout n$\in\mathbb{N}$

En effet : pour n = 1, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$ et $1^2 = 1$

Pour n = 2, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 5$ et $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

Mais ceci n'est pas une preuve : cette formule est-elle toujours valable pour toutes les valeurs de n supérieures à 2 ??

On va avoir recours à un nouveau type de raisonnement pour définitivement prouver ce genre de conjecture : **le raisonnement par récurrence**.

Historiquement, le premier à avoir utilisé ce type de raisonnement est le mathématicien et philosophe français Blaise Pascal (1623-1662) dans le Traité du triangle arithmétique (1654)

L'ensemble a été axiomatisé au XIXième siècle par Peano et son nom définitif est sans doute dû au mathématicien français Henri Poincaré.

Il y aura trois étapes dans ce raisonnement :……………………………………………………………

3) Méthode et rédaction :

Supposons qu'on souhaite démontrer une propriété vraie à partir d'un rang $n_0 \in\mathbb{N}$

- On commence par poser clairement la propriété à démontrer
- On prouve la propriété au rang n_0 . C'est l'étape **d'initialisation**
- On suppose la propriété vérifiée pour un certain rang $n \geq n_0$, puis , sous cette hypothèse, on la démontre au rang suivant (=c'est-à-dire au rang n+1) C'est l'étape **d'hérédité**
- On conclue : la propriété a été initialisée, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel supérieur à n_0

4) Exemple de démonstration par récurrence *(Inégalité de Bernoulli)*

Soit a, un réel strictement positif, on souhaite montrer que $(1 + a)^n \geq 1 + na$, pour tout n$\in\mathbb{N}$

Posons P(n) : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ »

- **Initialisation :**

- **Hérédité :**

- **<u>Conclusion :</u>**

(Cette inégalité a été démontrée la première fois en 1689 par Jean Bernoulli, mathématicien suisse)

<u>Remarques :</u>

a) n_0 peut prendre n'importe quelle valeur entière positive

b) Toutes les étapes du raisonnement sont indispensables

<u>Exemple :</u> Considérons la proposition suivante : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 , pour tout $n \in \mathbb{N}$ »

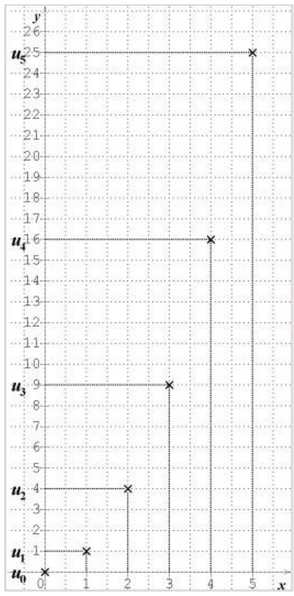
III) <u>Limites des suites :</u>

1) <u>Limite infinie :</u>

<u>Exemple :</u>

Considérons la suite de terme général u_n défini par $u_n = n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Représentons le nuage de points des 6 premiers termes de cette suite :



On peut conjecturer que plus n augmente, plus u_n va augmenter.
En fait, on dira que la suite (u_n) a une limite …………………………..
Notation :

De manière générale, on peut définir une suite de limite infinie :
Définitions :

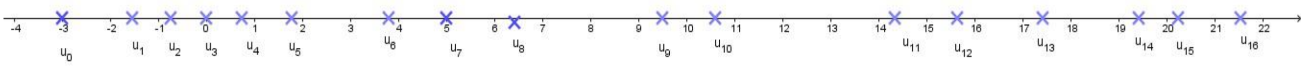
- On dit qu'**une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$**, si ……………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………

  …………………………………………………………………………..
- On dit qu'**une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$**,si ……………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………



Exemples de suites de références :

$$\lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^p \text{ (avec p } \in \mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on dit que (u_n) …………………………..

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors on dit que (u_n) …………………………..

Remarque : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = -\infty$

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$

2) Limite finie :

Exemple : Considérons la suite (u_n) de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

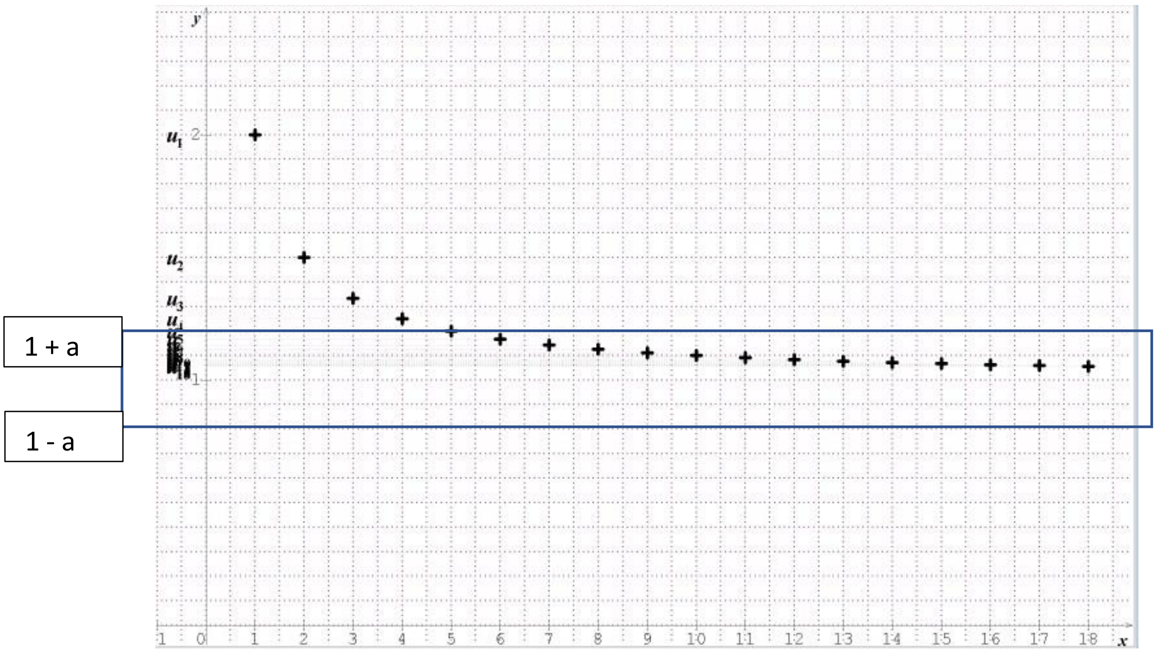
n	u
1	2
2	1,5
3	1,33333
4	1,25
5	1,2
6	1,16667
7	1,14286
8	1,125
9	1,11111
10	1,1
11	1,09091
12	1,08333
13	1,07692
14	1,07143
15	1,06667

n	u
16	1,0625
17	1,05882
18	1,05556
19	1,05263
20	1,05
21	1,04762
22	1,04545
23	1,04348
24	1,04167
25	1,04
26	1,03846
27	1,03704
28	1,03571
29	1,03448
30	1,03333
31	1,03226

n	u
31	1,03226
32	1,03125
33	1,0303
34	1,02941
35	1,02857
36	1,02778
37	1,02703
38	1,02632
39	1,02564
40	1,025
41	1,02439
42	1,02381
43	1,02326
44	1,02273
45	1,02222
46	1,02174

Conjecture : Il semblerait que plus n augmente, plus u_n se rapproche de la valeur …………

Nuage de points de la suite (u_n) :



Soit a > 0, l'intervalle ouvert ………… contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Il y a accumulation des termes de la suite autour de la valeur ……. à partir d'un certain rang.

On dira que (u_n) admet une limite finie égale à ………... On dira aussi que (u_n) converge vers ………..

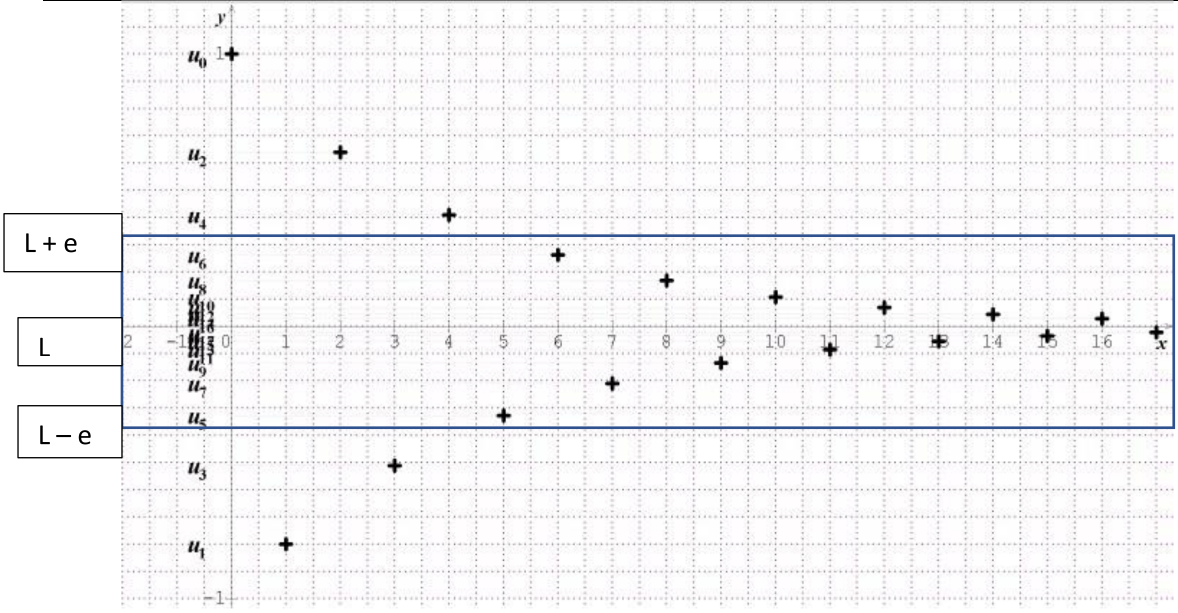
Notation :……………………

De manière générale :

Définition :

Soit L $\in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers L si ……………………………………………………

……



(u_n) est une suite qui converge vers un réel L.

Soit e > 0, tous les intervalles ouverts …………………… contiennent tous les termes de (u_n) à partir d’un certain rang.

Notation :……………………………..

Théorème (Admis) :

Si une suite (u_n) admet une limite finie L, alors L est unique.

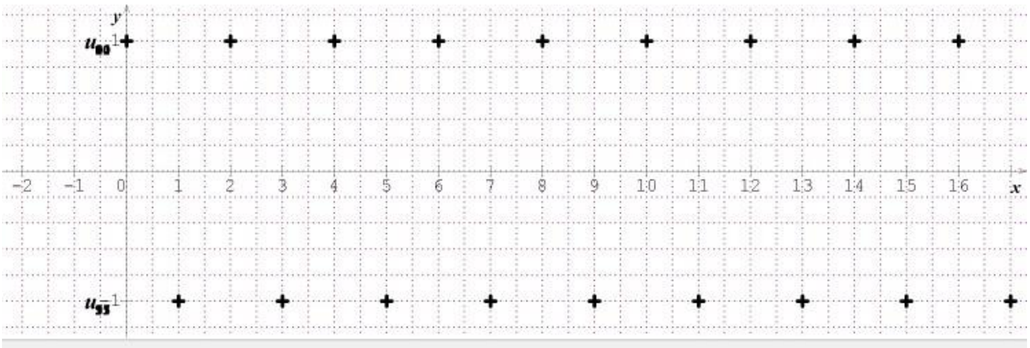
Exemples de suites ayant 0 pour limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} \text{ (avec p } \in \mathbb{N}^*\text{) } = 0$$


Certaines suites n’admettent pas de limite .

Exemple : $u_n = (-1)^n$

Nuage de points de cette suite :



- Les termes d'indices pairs valent 1
- Les termes d'indices impairs valent -1

Si on prend]-1-0,5 ; -1+0,5[=]-1,5 ;-0,5[ne contient pas tous les termes valant 1 .

Même chose pour les ouverts centrés en 1

Remarque : Une suite qui ne converge pas est dite divergente.


Il y a trois types de divergence :

-……………………………………..

-……………………………………..

-……………………………………..

3) Opérations sur les limites :

On considère deux suites (u_n) et (v_n). On va étudier tous les cas possibles des éventuelles limites de la somme, du produit et du quotient de ces deux suites.

On considère L et L', deux nombres réels

a) Somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$						

b) Produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L>0	L<0	L>0	L<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	+ ou - ∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$									

c) Quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	+ ou - ∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'≠ 0	+ ou - ∞	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	+ ou - ∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{u_n}{v_n})$								

Remarques :

- Il y a quatre formes indéterminées notées souvent par abus de langage :
- Pour lever les éventuelles indéterminations, on transformera l'écriture de l'expression de la suite dont on veut connaître la limite pour se ramener aux autres cas des tableaux précédents.

Exemples :

Soit $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2 = +\infty$. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée du type « ……….. »

Pour lever cette indétermination, on va mettre n en facteur dans le numérateur et aussi dans le dénominateur :

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$ (Par somme). Même chose pour $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{n}$

Donc … … … … … … ..(Par quotient)

IV) Théorèmes de convergence :

1) Comparaison :

> **Théorème 1 :** Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots\ldots$

Démonstration : (Exigible)

Exemple :

On souhaite étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n) définie pour tout n∈ℕ, par :

$$u_n = \sqrt{n^2 + 1}$$

Théorème 2 : Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ = ………

Démonstration :

Laissée au lecteur.

Théorème 3 : *(Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes)*
Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) , trois suites telles que : $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang

et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ = L avec L ∈ ℝ , alors ……………………………

Démonstration :

Exemple :

On souhaite étudier la convergence de la suite (u_n) définie pour tout n∈ℕ* par :

$$u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$$

2) Cas particulier des suites géométriques : comportement à l'infini

Propriété :

	Si q ≤ -1	**Si -1< q <1**	**Si q = 1**	**Si q > 1**
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$				

Exemples :

1) Si $u_n = 4\times(\frac{2}{3})^n$, pour tout n∈ℕ, alors………………………………………………..
2) Si $v_n = (\frac{4}{3})^n$, pour tout n∈ℕ, alors…………………………………………………..
3) Si $w_n = (-2)^n$, pour tout n∈ℕ, alors …………………………………………………

Démonstration : (Exigible)

3) Suites majorées, minorées et bornées :

a) Définitions :

- Suite majorée : Si il existe un réel M tel que $u_n \leq M$, pour tout n∈ℕ, alors on dit que (u_n) est majorée par le réel M . (On dit aussi que M est un majorant de (u_n))

- Suite minorée : Si il existe un réel m tel que $u_n \geq m$, pour tout n∈ℕ, alors on dit que (u_n) est minorée par le réel m . (On dit aussi que m est un minorant de (u_n))

- Suite bornée : Si une suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée.

Exemples : 1) Si $u_n = n$, pour tout n∈ℕ, alors u_n est minorée par 0 mais n'est pas majorée

2) Si $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout n∈ℕ*, alors $v_n < 1$, pour tout n∈ℕ*
donc (v_n) est majorée par 1

Remarque :

- Toute suite croissante est minorée par son ………………………

- Toute suite décroissante est majorée par son …………………….

- La suite de terme général $(-1)^n$ est minorée par -1 et majorée par 1, elle est donc ……………….

3) Propriété :

Soit L un réel. Si une suite (u_n) est croissante et admet L pour limite, alors (u_n) est majorée par L.

Remarque : Si M est un majorant de (u_n), on peut juste dire que $L \leq M$

4) **Théorème (Convergence d'une suite monotone) :**

- ………………………………………………………….
- ………………………………………………………….

Remarque : Ce théorème assure de l'existence de la limite, mais ne donne pas sa valeur.

5) Propriété :

Soit (u_n) une suite croissante, non majorée, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$