

Spé Maths Terminale (M Mangeard)	<u>Devoir de mathématiques :</u> <i>Primitives, fonction ln, géométrie dans l'espace</i>	Lundi 03 mai 2021
--	--	-------------------

- Durée : 1h30
- Calculatrice autorisée
- Cours autorisé également

Observations :

NOTE :

/20

Exercice 1 : Primitives

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes :

- 1) Soit $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$
- 2) Soit $g(x) = 3x^2e^{x^3}$. Déterminer la primitive G de g sur $\mathbb{R}$ telle que : $G(1) = \frac{1}{2}$
- 3) Soit $h(x) = \frac{5x}{(2x^2+7)^2}$. Déterminer une primitive de h sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 : Fonction ln

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$

- 1) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0
- 2) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0; +\infty[$
- 3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$
- 4) Calculer g(1), puis déterminer le signe de g sur $]0; +\infty[$

Partie B : Etude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (2 - \frac{1}{x})(\ln(x) - 1)$

- 1) a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa dérivée.

Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau de signes de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie C : Etude d'une fonction F admettant f comme dérivée

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0 ; +\infty[$, dont la dérivée est f . Ainsi, on a : $F' = f$

On note (C_F) la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On ne cherche pas à déterminer une expression de $F(x)$

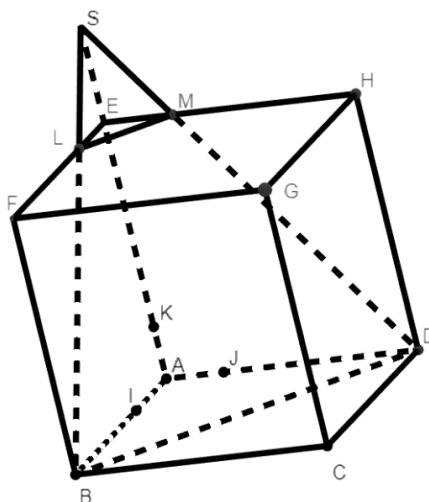
1) Etudier les variations de F sur $]0 ; +\infty[$

2) La courbe (C_F) de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6m d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous :



On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ tels que :

$AI = AJ = AK = 1$. Les points I , J et K appartiennent respectivement aux segments $[AB]$, $[AD]$ et $[AE]$.

L'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L , M et S sont définis par :

- $\vec{FL} = \frac{2}{3} \vec{FE}$
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH)
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK)

1) Sans calcul de coordonnées, en utilisant les plans (EFG) et (ABC), montrer que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2) Démontrer que les coordonnées du point L sont (2 ; 0 ; 6)

3) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL)

On admet que les coordonnées du point S sont (0 ; 0 ; 9)

4) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 3 ; 2)

a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL)

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est : $3x + 3y + 2z - 18 = 0$

c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 6 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Calculer les coordonnées du point M

5) Calculer le volume du tétraèdre SELM

6) **BONUS :** L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60° . Cette contrainte d'angle est-elle respectée ? Justifier.