Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Cours : Fonctions trigonométriques** *Rappels et compléments*	2020/2021

I) Fonction sinus :

1) Périodicité :

Soit f(x) = sin(x). f est définie et périodique de période 2π.

C'est-à-dire : pour tout x réel, $f(x + 2\pi) = f(x)$

Remarque importante : Pour étudier la fonction sin, il suffit donc de se placer sur un intervalle de longueur 2π (Par exemple : $[-\pi ; \pi]$)

2) Parité :

f est définie sur $]-\infty ; +\infty[$ (=domaine symétrique par rapport à l'origine)

De plus f(-x) = sin(-x) = - sin(x), pour tout x réel.

f est donc une fonction impaire

La courbe de f présente donc une symétrie centrale de centre O

Remarque : Il suffit d'étudier la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$

3) Continuité :

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$

4) Dérivabilité :

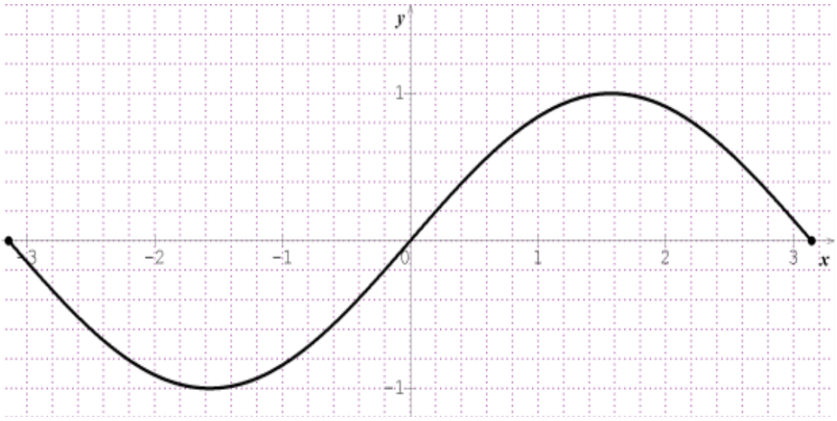
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et **f '(x) = cos(x)**

5) Variations sur $[0 ; \pi]$:

Comme f '(x) = cos(x) et $\cos(x) \geq 0$, pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ et cos(x) < 0 , sur $]\frac{\pi}{2} ; \pi]$

Autrement dit : f est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $]\frac{\pi}{2} ; \pi]$

6) Courbe représentative de sin sur $[-\pi ; \pi]$:



7) Limites :

La fonction sinus n'a pas de limite en + ou - ∞

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Démonstration :

$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0)$ car la fonction sin est continue en 0.

D'où : $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$

Par quotient, on a donc une forme indéterminée du type : « 0/0 »

Or, $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$, d'où : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$

II) Fonction cosinus :

1) Périodicité :

Soit f(x) = cos(x). f est définie et périodique de période 2π.

C'est-à-dire : pour tout x réel, $f(x + 2\pi) = f(x)$

Remarque importante : Pour étudier la fonction cos, il suffit donc de se placer sur un intervalle de longueur 2π (Par exemple : $[-\pi ; \pi]$)

2) Parité :

f est définie sur $]-\infty ; +\infty[$ (=domaine symétrique par rapport à l'origine)

De plus f(-x) = cos(-x) = cos(x), pour tout x réel.

f est donc une fonction paire

La courbe de f présente donc une symétrie d'axe l'axe des ordonnées.

Remarque : Il suffit d'étudier la fonction cosinus sur $[0 ; \pi]$

3) Continuité :

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$

4) Dérivabilité :

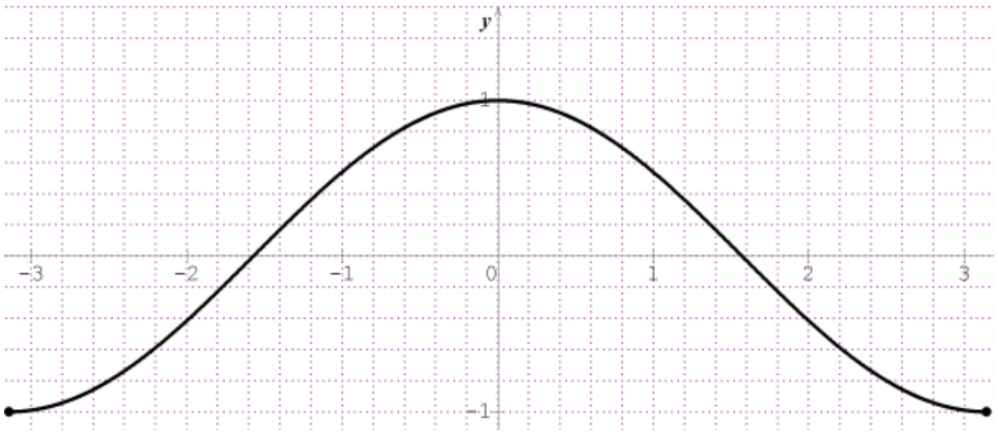
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et **f '(x) = -sin(x)**

5) Variations sur [0 ;π] :

Sur $[0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$, d'où : $-\sin(x) \leq 0$

Donc : f est décroissante sur $[0; \pi]$

6) Courbe représentative de cos sur [-π ;π] :



7) Limites :

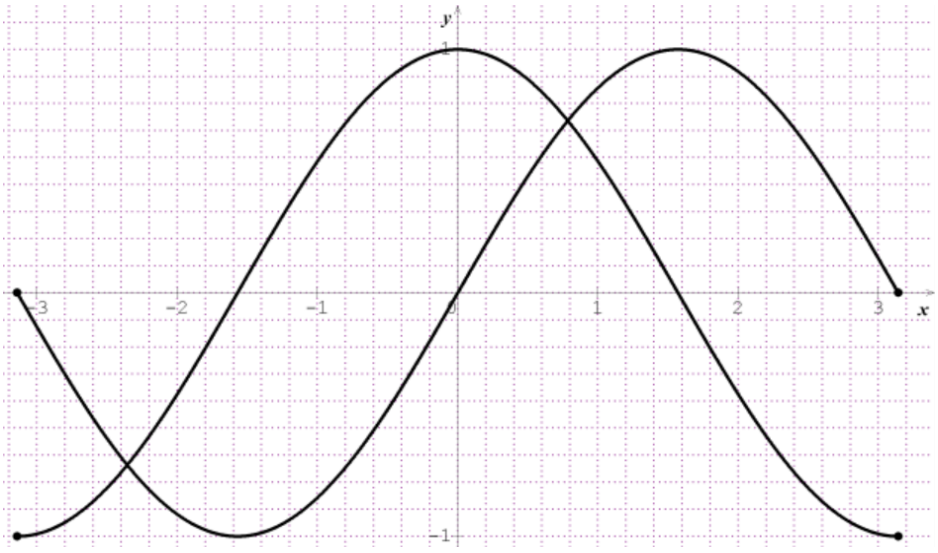
La fonction cosinus n'a pas de limite en + ou - ∞.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Démonstration :

Remarque :

Les deux sinusoïdes sont décalées de $\frac{\pi}{2}$ (on parle de **décalage en quadrature**) :



$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

III) Equations et inéquations trigonométriques :

Pour les résolutions d'équations et d'inéquations trigonométriques, il est impératif de connaître les valeurs remarquables de cos et sin.

1) Equations :

Soit a $\in\mathbb{R}$, l'équation cos(x) = cos(a) admet comme solutions les x = a + 2kπ, k$\in\mathbb{Z}$, et les x = - a +2kπ, k$\in\mathbb{Z}$

Soit a $\in\mathbb{R}$, l'équation sin(x) = sin(a) admet comme solutions les x = a + 2kπ, k$\in\mathbb{Z}$, et les x = π - a +2kπ, k$\in\mathbb{Z}$

Exemples :

a) cos(x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur [0 ;2π]

cos ($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc : cos($\pi-\frac{\pi}{6}$) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ = cos ($\frac{5\pi}{6}$) et cos ($-\frac{5\pi}{6}$) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or, $-\frac{5\pi}{6} \notin [0\ ;2\pi]$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$

Les solutions sur [0 ;2π] sont :

$$S = \{\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\}$$

b) Résoudre l'équation cos (3x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur [0 ;2π]

- Tout d'abord, sur $\mathbb{R}$:

cos($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = cos($-\frac{\pi}{6}$)

D'où : 3x = $\frac{\pi}{6}$ + 2kπ ou 3x = $-\frac{\pi}{6}$ + 2kπ, avec k $\in\mathbb{Z}$

Donc : x = $\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ ou x = $-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, avec k $\in\mathbb{Z}$

(ATTENTION : Il faut aussi diviser le 2kπ par 3)

Donc les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont :

S = $\{\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\ ;\ -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ avec k $\in\mathbb{Z}\}$

- Sur [0 ;2π] :

Il faut déterminer toutes les solutions de cette équation situées dans [0 ;2π].

On peut raisonner par encadrements pour obtenir les différentes valeurs de k possibles :

On a : $0 \leq \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi$ | $0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi$

$$-\frac{\pi}{18} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi - \frac{\pi}{18} = \frac{35\pi}{18}$$

D'où : $\frac{3}{2\pi} \times (-\frac{\pi}{18}) \leq k \leq \frac{35\pi}{18} \times \frac{3}{2\pi}$

$-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{35}{12}$, d'où k = 0 ;1 ou 2

D'où : $x = \frac{\pi}{18} ; \frac{13\pi}{18} ; \frac{25\pi}{18}$

$$\frac{\pi}{18} \leq \frac{2k\pi}{3} \leq 2\pi + \frac{\pi}{18} = \frac{37\pi}{18}$$

D'où : $\frac{3}{2\pi} \times (\frac{\pi}{18}) \leq k \leq \frac{37\pi}{18} \times \frac{3}{2\pi}$

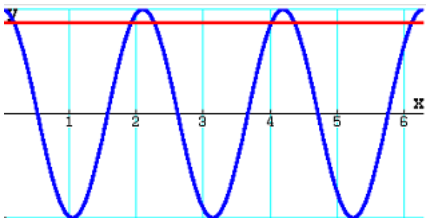
$\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{37}{12}$, d'où k = 1 ;2 ou 3

$x = \frac{11\pi}{18} ; \frac{23\pi}{18} ; \frac{35\pi}{18}$

Donc, finalement :

$$S = \{\frac{\pi}{18} ; \frac{13\pi}{18} ; \frac{25\pi}{18} ; \frac{11\pi}{18} ; \frac{23\pi}{18} ; \frac{35\pi}{18}\}$$

Vérification à la calculatrice :



La sinusoïde de f telle que f(x) = cos(3x) coupe la droite horizontale d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ six fois sur [0 ;2π] : l'équation a donc six solutions sur [0 ;2π]

c) Résoudre l'équation $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur [-π ;π]

On a : $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\pi - (-\frac{\pi}{4})) = \sin(\frac{5\pi}{4})$

D'où :

$2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$-\pi \leq -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq \pi$

$-\frac{7\pi}{8} \leq k\pi \leq \frac{9\pi}{8}$

$-\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{9}{8}$

D'où : k = 0 ; 1

$x = -\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}$

$-\pi \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi \leq \pi$

$-\frac{13\pi}{8} \leq k\pi \leq \frac{3\pi}{8}$

$-\frac{13}{8} \leq k \leq \frac{3}{8}$

D'où : k = -1 ; 0

$x = -\frac{3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8}$

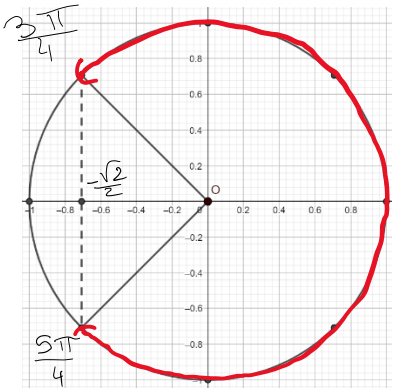
Par conséquent : $S = \{-\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8} ; -\frac{3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8}\}$

2) Inéquations :

Utiliser à chaque fois un schéma d'un cercle trigonométrique.

Exemples :

a) Résoudre l'inéquation suivante sur [0 ;2π] : $\cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$



On a $\cos(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les solutions correspondent aux valeurs représentées en rouge sur le cercle trigonométrique ci-dessus.

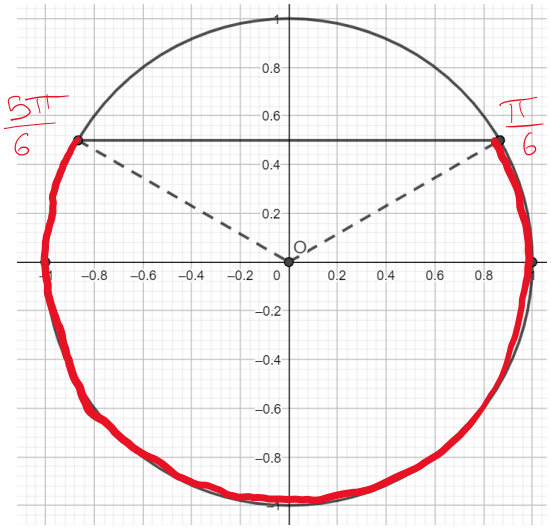
ATTENTION : *L'intervalle de résolution est [0 ;2π]*

Donc :

$$S = [0 ; \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4} ; 2\pi]$$

b) Résoudre l'inéquation suivante sur [-π ;π] : $\sin(2x) < \frac{1}{2}$

On a $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = \sin(\frac{5\pi}{6})$



D'où $2x \in [-\pi ; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6} ; \pi]$ et donc : $S = [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{12}[\cup]\frac{5\pi}{12} ; \frac{\pi}{2}]$

IV) Fonctions cos(u(x)) et sin(u(x)), où u est une fonction :

Soit u, une fonction définie et dérivable sur I⊂ℝ.

Alors, cos(u(x)) et sin(u(x)) sont dérivables sur I et :

1) (cos(u))' = -u'sin(u)	2) (sin(u))' = u'cos(u)

Exemples :

a) f(x) = cos(3x + $\frac{\pi}{6}$)

On pose u(x) = 3x + $\frac{\pi}{6}$

u est dérivable sur ℝ et u'(x) = 3

f est dérivable sur ℝ et (cos(u))' = -u'sin(u)

D'où : f '(x) = -3sin(3x + $\frac{\pi}{6}$)

b) g(x) = cos(2x) sin(4x)

On pose u(x) = cos(2x) et v(x) = sin(4x)

u et v sont dérivables sur ℝ.

On pose a(x) = 2x et b(x) = 4x

a'(x) = 2 et b'(x) = 4

On a : u'(x) = -2sin(2x) et v'(x) = 4cos(4x)

De plus, (uv)' = u'v + uv'

D'où : g'(x) = -2sin(2x)sin(4x) + 4cos(4x)cos(2x)

Exemple d'étude d'une fonction trigonométrique : la fonction tangente

Soit f(x) = $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

a) Tout d'abord : cos(x) = 0 ⇔ x = $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ ou x = - $\frac{\pi}{2}$ + 2kπ, avec k ∈ℤ

⇔ x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, avec k ∈ℤ

Donc f est définie sur ℝ\{$\frac{\pi}{2}$ + kπ, avec k ∈ℤ}

b) *Montrons que f est π-périodique :*

Soit x ∈ℝ , f(x + π) = $\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$ = $\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}$ = $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ = f(x) , donc **f est π-périodique**

On peut donc étudier f sur un intervalle de longueur π. On va se placer sur]- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$[

c) *Etude de la parité de f :*

L'intervalle]- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$[est symétrique par rapport à l'origine.

De plus, soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ (car sin(-x) = -sin(x) et cos(-x)=cos(x))

$= - f(x)$

Donc : **f est impaire (=sa courbe représentative présente une symétrie de centre O)**

On va donc pouvoir étudier f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$

d) Variations de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$:

f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, car un quotient est dérivable partout où il est défini.

On pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$

On a : $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$

Or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D'où : $f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$ $(= 1 + (\tan(x))^2)$

(car $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$)

Or, $(\cos(x))^2 > 0$, pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire : f strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

On a : $f(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = 0/1 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = ?$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2})$ (car sin est continue en $\frac{\pi}{2}$)

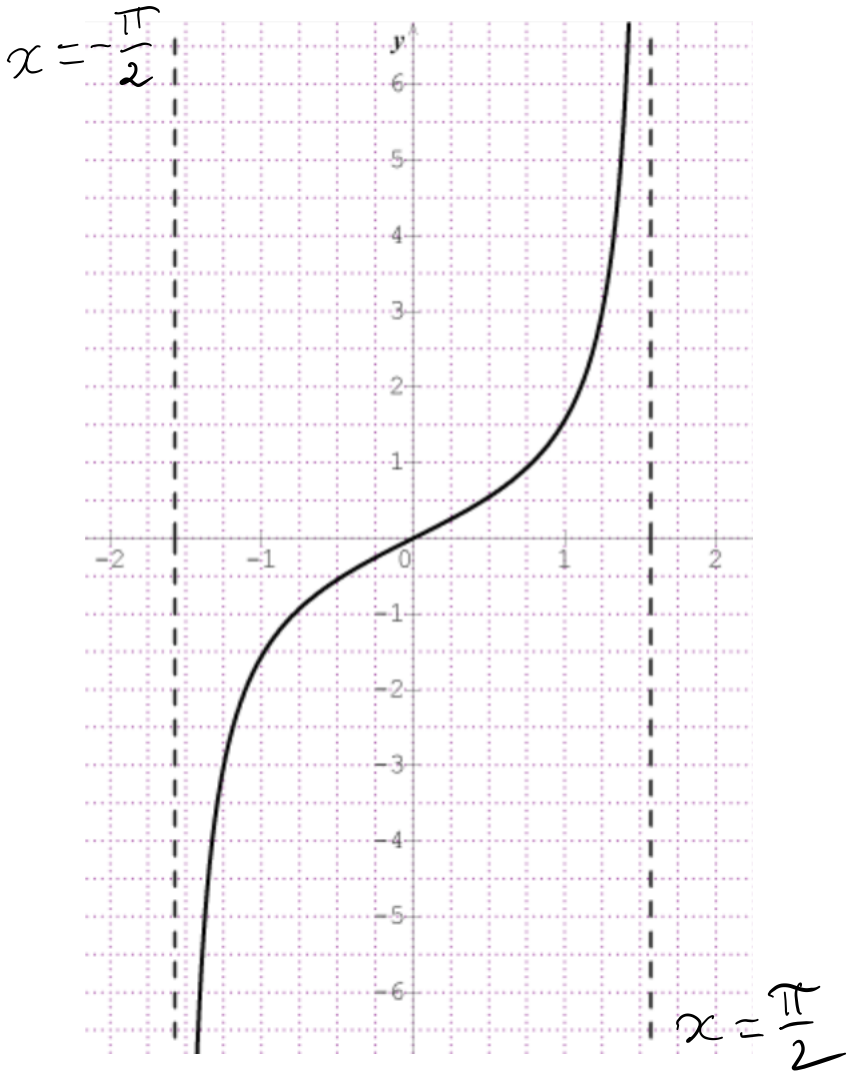
$= 1$

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$, d'où , par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$

(IG : La courbe de f admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme asymptote verticale)

Tableau de variations de f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$:

x	0 $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
Signe de f '(x)	+
Variations de f	0 $\nearrow$ $+\infty$

Par symétrie de centre O, la courbe de f admet aussi la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ comme asymptote verticale.

Courbe représentative de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$: