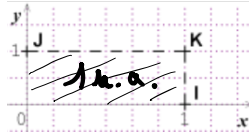


I) Intégrale d'une fonction continue et positive :**Définition de l'unité d'aire dans un repère orthogonal :**

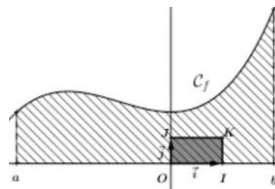
Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité d'aire (notée u.a.) est l'aire du rectangle de « base ».

**1) Notion d'intégrale :**

Soient a et b , deux réels tels que $a < b$. On considère une fonction f continue et positive sur $[a; b]$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Le domaine situé sous la courbe (C_f) est le domaine situé entre (C_f) , l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



L'aire, en u.a., du domaine situé sous la courbe (C_f) est **l'intégrale de a à b de la fonction f** (notée $\int_a^b f(x)dx$)

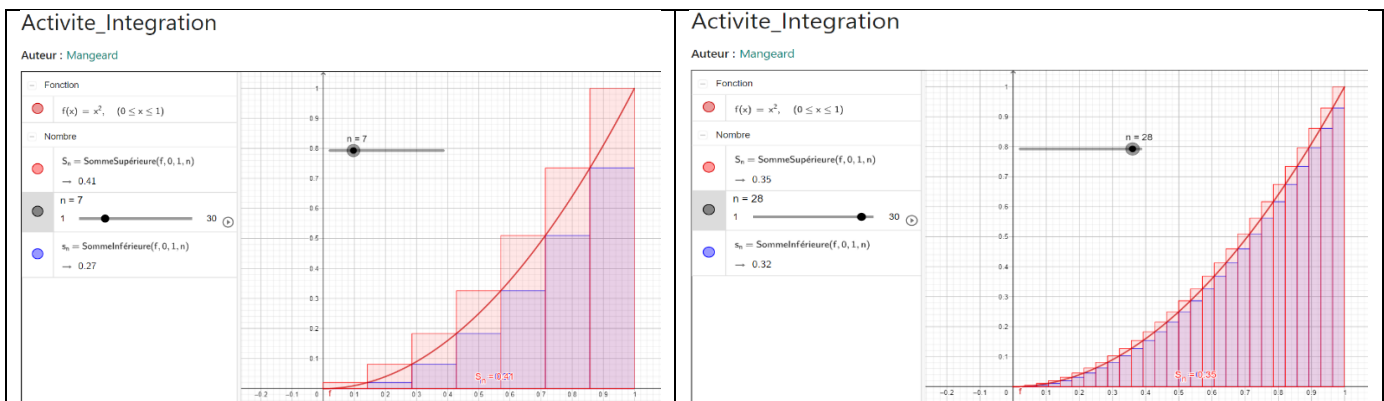
Remarque historique : La notation $\int$ vient du mathématicien allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) et ressemble à un S pour signifier qu'une aire peut s'écrire comme somme d'aires.

Remarque de notation : La variable x est dite « muette » = elle n'intervient pas dans le résultat

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque sur l'encadrement d'aires par la méthode des rectangles :

Exemple : Aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1 peut être approchée de cette manière :



n = nbre de triangles violets et aussi nbre de triangles roses

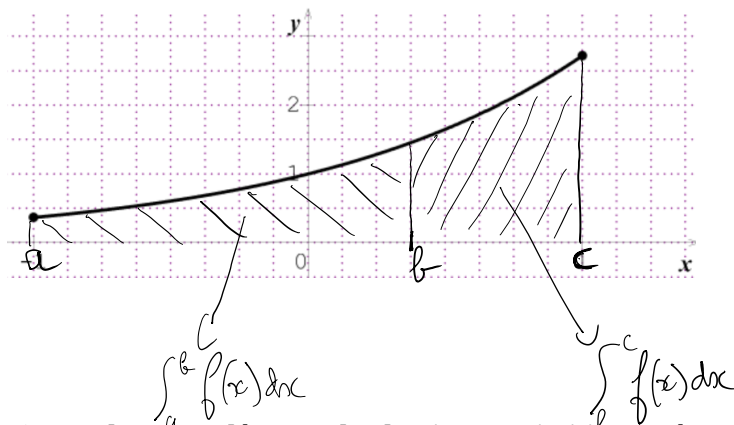
Signe : Si f est continue positive sur $[a ; b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est positive ou nulle

2) Propriétés :

a) $\int_a^a f(x)dx = 0$ (Par définition)

b) **Relation de Chasles :** Pour tous nombres réels a , b et c avec $a \leq b \leq c$,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



II) **Primitives (Rappels + compléments du chapitre « Primitives et équations différentielles » :**

1) **Théorème fondamental :**

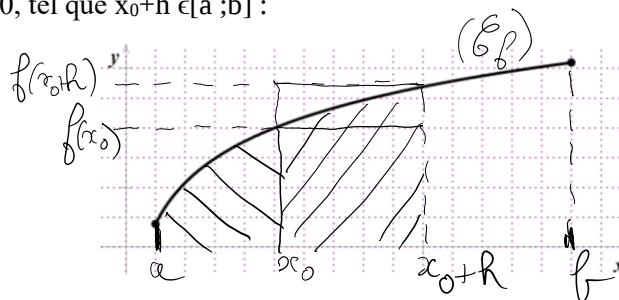
Soit f , une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. Alors la fonction :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt, \text{ est dérivable sur } [a ; b] \text{ et } F'(t) = f(t), \text{ pour tout } t \in [a ; b]$$

Démonstration :

Considérons f croissante sur $[a ; b]$:

Soit $x_0 \in [a ; b]$ et $h \neq 0$, tel que $x_0 + h \in [a ; b]$:



Cas $h > 0$:

f est continue et positive sur $[a ; b]$, donc d'après la relation de Chasles des intégrales :

$$\int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

$$\text{Or, } F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt \text{ et } F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$$

D'où : $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ on peut encadrer cette aire par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$:

$$\text{Donc : } f(x_0) \times h \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq f(x_0 + h) \times h$$

Comme $h \neq 0$, on a : $f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$

On montre le même encadrement quand $h < 0$

Or, f est continue sur $[a ; b]$, d'où en particulier en x_0 , car $x_0 \in [a ; b]$

D'où : $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, d'après le théorème d'encadrement,

$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0 et : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Autrement dit : $F'(x_0) = f(x_0)$. Ce raisonnement est valable pour tout x_0 dans $[a ; b]$

Donc : F est dérivable sur $[a ; b]$ et $F' = f$

2) Primitives d'une fonction sur un intervalle :

a) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que la fonction F est une primitive de f sur I , si F est dérivable sur I et $F' = f$

ATTENTION : Une fonction donnée admet une infinité de primitives !

Exemple : $F_1(x) = 3x^2 + 1$ et $F_2(x) = 3x^2 + 15$ sont des primitives de f définie par $f(x) = 6x$

b) Propriété :

On considère f une fonction définie sur un intervalle I et qui admet une primitive F sur I .

- L'ensemble de toutes les primitives de f sur I est constitué des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$, où k est un nombre réel.
- Il existe une seule primitive G de f sur I , telle que $G(x_0) = y_0$, avec $x_0 \in I$

Démonstration : (simple)

3) Calculs de primitives :

a) Existence de primitives :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

b) Formulaire (lecture à l'inverse du tableau des dérivées) :

K est nombre réel :

Fonction f définie sur I :	Les primitives de f sont définies sur I par $F(x) =$	L'intervalle I
$f(x) = a$, avec a réel	$F(x) = ax + K$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2 + K$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec n entier relatif $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + K$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ si n est négatif
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + K$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + K$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + K$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + K$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + K$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + K$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + K$	Domaine de définition de u
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + K$	Définie pour $u(x) \neq 0$
$f(x) = u'(x)(u(x))^n$ (n entier $\neq 0$ et $\neq 1$)	$F(x) = \frac{1}{n+1} \left((u(x))^{n+1} \right) + K$	Domaine de définition de u Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln u(x) + K$	$u(x) > 0$ sur I
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + K$	$u(x) > 0$ sur I

Exemples :

a) Soit $f(x) = \frac{7x}{x^2+1}$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $u(x) = x^2 + 1$

D'où : $u'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{7}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{7}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$, d'où : $F(x) = \frac{7}{2} \ln(x^2 + 1) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$: ce sont toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$

b) Soit $g(x) = 3 \sin x \cos^3 x$

On pose $u(x) = \cos x$ d'où : $u'(x) = -\sin x$

$g(x) = -3u'(x)(u(x))^3$

D'où : $G(x) = -3 \times \frac{1}{3+1} (\cos x)^{3+1} + K$, avec $K \in \mathbb{R}$: ce sont toutes les primitives de g sur $\mathbb{R}$
 $= -\frac{3}{4} (\cos x)^4 + K$

III) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque :

1) Calcul d'intégrales :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ;b], et F une primitive de f sur [a ;b], alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Démonstration :

Propriété : On peut étendre la propriété précédente pour une fonction f continue sur [a ;b] de signe quelconque.

En pratique : Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on détermine une primitive de F de f sur [a ;b] et alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Conséquence importante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soient a et b deux nombres réels de I avec $a < b$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2) Exemples :

a) Calculer $I = \int_1^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}$ en u.a.

b) Calculer $J = \int_0^1 \frac{5x}{(x^2+1)^2} dx$

$$u(x) = x^2 + 1 \quad \frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = \frac{5}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5x}{(x^2+1)^2} \quad \text{d'où : } J = -\frac{5}{2} \left[\frac{1}{x^2+1} \right]_0^1 = -\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{4} \text{ en u.a}$$

3) Propriétés des intégrales :

Dans tout ce qui suit, f et g sont des fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$

a) Propriétés algébriques :

Linéarité de l'intégrale :

Pour tout λ et μ , réels :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

Exemple :

$$\int_1^2 \left(5e^x + \frac{4}{x} \right) dx = 5 \int_1^2 e^x dx + 4 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 5[e^x]_1^2 + 4[\ln x]_1^2 = \underline{\underline{5(e^2 - e) + 4 \ln 2}}$$

b) Inégalités :

• Positivité :

$$\text{Si pour tout } x \in [a ; b], f(x) \geq 0, \text{ alors : } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

De même,

$$\text{Si pour tout } x \in [a ; b], f(x) \leq 0, \text{ alors : } \int_a^b f(x) dx \leq 0$$

ATTENTION : Si f change de signe sur $[a ; b]$. Ces résultats ne sont pas applicables.

• Comparaison :

$$\text{Si pour tout } x \in [a ; b], f(x) \geq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Démonstration :

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$$

D'après la positivité de l'intégrale, $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$

Par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

c) Valeur moyenne :

Définition :

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$ est le réel M tel que :

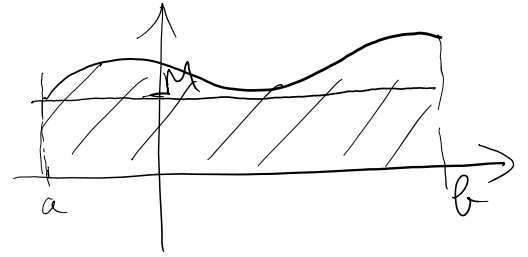
$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation graphique :

$\int_a^b f(x) dx = M(b - a) = \text{aire du domaine situé sous la courbe de } f \text{ entre les droites d'équations } x = a \text{ et } x = b.$

(28)

En fait, c'est l'aire du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur M



IV) Formule d'intégration par parties :

Exemple : Si on souhaite calculer l'intégrale I suivante : $I = \int_0^1 (3x + 2)e^{-x} dx$

On ne reconnaît pas une formule connue de primitive.

On va alors utiliser la propriété suivante.

Propriété : *Intégration par parties*

Soient a et b , deux réels, tels que $a < b$, u et v , deux fonctions continues sur $[a ; b]$.

Avec u et v , dérivables, u' et v' continues sur $[a ; b]$.

Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Or, uv est une primitive de $(uv)'$

$$\text{D'où : } \int_a^b (uv)'(x)dx = [uv(x)]_a^b = [u(x)v(x)]_a^b$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } \int_a^b (uv)'(x)dx &= \int_a^b (u'v(x) + u(x)v'(x)) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \quad (\text{Par linéarité de l'intégrale}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exemple : On va utiliser cette formule pour calculer : $I = \int_0^1 (3x + 2)e^{-x} dx$

La fonction $x \mapsto (3x + 2)e^{-x}$ est continue sur $[0 ; 1]$: elle y admet donc des primitives

$$\text{On pose : } u(x) = 3x + 2 \quad v'(x) = e^{-x}$$

$$v(x) = -e^{-x} \quad u'(x) = 3$$

D'autre part : u' et v' sont continues sur $[0 ; 1]$

On va appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx$$

$$I = [-(3x + 2)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -3e^{-x} dx$$

$$= -5e^{-1} + 2 + 3 \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - \frac{5}{e} + 3[-e^{-x}]_0^1 = \frac{2e-5}{e} - 3e^{-1} + 3$$

$$= \frac{5e-8}{e}$$