Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Convexité**	Année scolaire 2020/2021

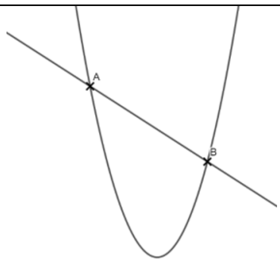
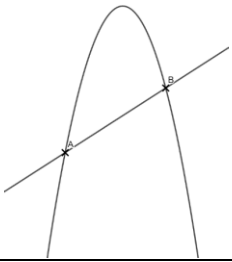
Pré requis : Les formules de dérivation avec leurs compléments

I) Approche graphique de la convexité :

1) Fonction convexe / Fonction concave :

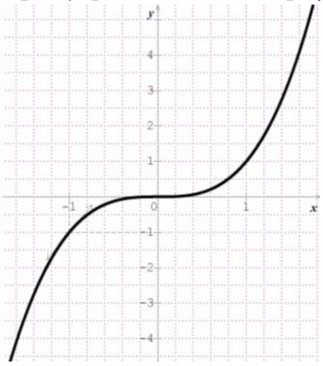
On considère une fonction f sur un intervalle I, a et b, deux nombres tels que :

$a < b$ avec a , b $\in$I. Le point A a pour coordonnées (a ;f(a)) et B(b ;f(b))

	
Sur l'intervalle [a ;b], la courbe de f est située sous la droite sécante (AB) On dit que f est **convexe** sur I	Sur l'intervalle [a ;b], la courbe de f est située au-dessus de la droite sécante (AB) On dit que f est **concave** sur I

Quelques exemples classiques :

- La fonction carré , la fonction exponentielle sont convexes sur ℝ
- La fonction racine carrée est concave sur [0 ;+∞[
- La fonction cube est concave sur]-∞ ;0] et convexe sur [0 ;+∞[



2) Lien avec les tangentes :

Propriété :

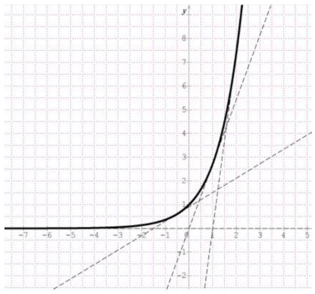
On considère une fonction f définie sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ et C_f, sa courbe représentative dans un repère.

Soit I un intervalle contenu dans D_f :

f est convexe sur I $\Leftrightarrow$ C_f est située au-dessus de toutes ses tangentes f est concave sur I $\Leftrightarrow$ C_f est située en dessous de toutes ses tangentes

Exemples :

- La fonction exponentielle, qui est convexe, a sa courbe représentative située toujours au-dessus de ses tangentes :



Remarque :

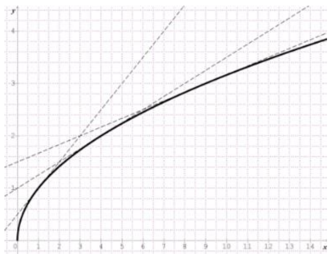
En particulier, si on considère a = 0.

La courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de la tangente en a = 0.

Or, l'équation réduite de cette tangente est y = x + 1

Donc : $e^x \geq 1 + x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet de prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ par comparaison.

- La courbe représentative de la fonction racine carrée, qui est concave, est toujours située en dessous de ses tangentes :

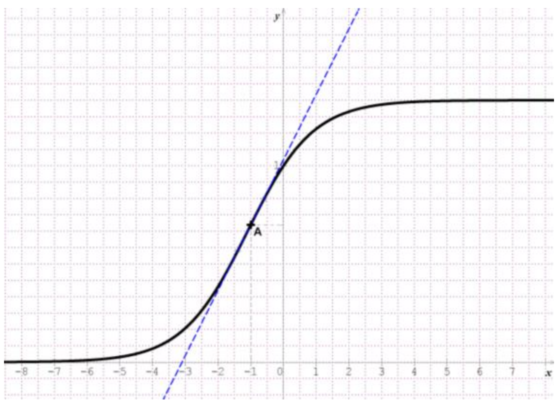


3) Point d'inflexion :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Soit A(a ;f(a)) un point de C_f.

On dit que A est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse en A sa tangente.



Remarque : En A, la fonction ainsi représentée change de convexité : ici, elle passe de convexe à concave.

Exemple : la fonction cube change de convexité en 0. Elle passe de concave sur]-∞ ;0] à convexe sur [0 ;+∞[. L'origine du repère est donc un point d'inflexion de C_f.

II) Caractérisations de la convexité des fonctions dérivables :

Notion de dérivée seconde d'une fonction :

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si f ' est elle-même dérivable sur I, on dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f '' la fonction dérivée de f ' (on appelle f '' la dérivée seconde de f)

Par exemple : les fonctions polynômes sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

Exemple de calcul de f '' :

Soit $f(x) = 7e^{-3x+2}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 7\times(-3)e^{-3x+2}$ et donc $f''(x) = -21\times(-3)e^{-3x+2} = 63\ e^{-3x+2}$

1) Propriétés (admises) :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I

f est convexe sur I ⇔ f ' est croissante sur I ⇔ f '' est positive sur I
f est concave sur I ⇔ f ' est décroissante sur I ⇔ f '' est négative sur I

Exemples :

a) Soit $f(x) = x^3$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2$

d'où : $f''(x) = 6x$.

Or, $6x \leq 0$, pour $x \leq 0$ et $6x \geq 0$, pour $x \geq 0$

On retrouve le fait que la fonction cube est concave sur]-∞ ;0] et convexe sur [0 ;+∞[

b) Soit $g(x) = \sqrt{x}$. g est dérivable sur]0 ;+∞[, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g 'est dérivable sur]0 ;+∞[. On pose $u(x) = 2\sqrt{x}$ alors $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Or, $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$, d'où : $g''(x) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$, pour tout $x \in]0\ ;+\infty[$

Donc : g est concave sur]0 ;+∞[(déjà vu précédemment)

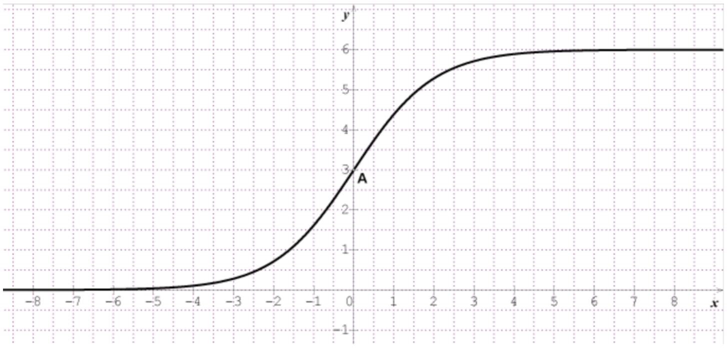
2) Point d'inflexion :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On considère $a \in I$. On note (C_f) la courbe de f dans un repère du plan :

(C_f) admet un point d'inflexion au point d'abscisse a ⇔ f 'change de sens de variation en a ⇔ f '' s'annule et change de signe en a

Exemple :

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{6}{e^{-x} + 1}$



<u>Conjecture :</u> il semblerait que le point A(0 ;3) soit un point d'inflexion de (C_f)

Démonstration :

f est deux fois dérivable sur ℝ, on a : $f'(x) = \frac{-6e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$ (calculs à faire !)

et $f''(x) = \frac{6e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^3}$ (calculs à faire également !)

on a $6e^{-x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^{-x} + 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^{-x} + 1)^3 > 0$

Autrement dit : le signe de f ''(x) dépend uniquement de celui de $e^{-x} - 1$

Or, $e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ et $e^{-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc f ''(x) s'annule et change de signe en 0.

Donc : <u>le point d'abscisse 0 est point d'inflexion pour la courbe de f.</u>

Ses coordonnées complètes sont : (0 ;f(0) = 3)