Spé Tale

Entraînement épreuve de spécialité

Sujet A

(Fait le 21/01/21)

Exercice 1 :

Question 1 :

$$f(x) = \frac{3x^2+x}{x^2-4} \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2+x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2-4 = +\infty$ } Par quotient, on a une FI du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\frac{3x^2+x}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}$$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{4}{x^2} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3+\frac{1}{x} = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-\frac{4}{x^2} = 1$

Par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Donc : $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 3$ comme asymptote horizontale en $\mp\infty$ (réponse b)

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x \to -2^+ \\ x \neq -2}} 3x^2+x = 3\times(-2)^2-2 = 12-2 = 10 > 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2^+ \\ x \neq -2}} x^2-4 = 0^-$ car

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par quotient, en appliquant la règle des signes du quotient :

$$\lim\limits_{\substack{x \to -2^+ \\ x \neq -2}} f(x) = -\infty$$

donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ (réponse d)

Question 2 :

$E = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5\}$

Le nombre de sous-ensembles de E à deux éléments correspond au nombre de combinaisons à deux éléments d'un ensemble à cinq éléments.

Autrement dit : $\binom{5}{2}$ = nombre de sous-ensembles à deux éléments de E

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2 \times 3!}$

(réponse c)

Question 3 :

Soit $x > 0$: $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$, Par sommes : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{3}{x} = 2$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (réponse b)

D'autre part : $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$

comme $x > 0$, alors $2x + 2 \leq x f(x) \leq 2x + 3$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 2 = +\infty$

D'après un théorème de comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = +\infty$ (réponse c)

Question 4 :

$u_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_n = -\frac{2}{u_n}$

a) Si (u_n) converge vers 0 (exple : $u_n = \frac{1}{n+1}$)

alors : $v_n = \frac{-2}{\frac{1}{n+1}} = -2(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$, d'où (v_n) est divergente.

donc a) est fausse

(b) Si (u_n) est minorée par 2 :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$

alors : $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

d'où $\frac{2}{u_n} \leq 1$

et $\underbrace{-\frac{2}{u_n}}_{= v_n} \geq -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (b) est vraie

(c) Prenons, par exemple, $u_n = \frac{1}{n+1}$

(u_n) est décroissante.

On a : $v_n = -\frac{2}{\frac{1}{n+1}} = -2 \times (n+1)$ et (v_n) est décroissante

Donc (c) est fausse

(d) Prenons, par exemple, $u_n = (-1)^n$

(u_n) est divergente.

et $v_n = -\frac{2}{u_n} = -\frac{2}{(-1)^n} = \begin{cases} -2, \text{ si } n \text{ pair} \\ 2, \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

donc (v_n) diverge.

Donc (d) est fausse.

Question (5) :

$f(x) = \sqrt{x^2+2} = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = x^2+2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'où f est dérivable est sur $\mathbb{R}$, d'où en particulier en -1

car, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, d'où $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

Alors : $f'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{1+2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Si on note (T_{-1}) la tangente cherchée :

$$(T_{-1}) : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$

or, $f(-1) = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

d'où $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1) + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \underline{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ (réponse a)

Exercice 2 :

Partie A

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

1). Sur $[-3;2]$, f semble croissante (conjecture 1)

- Sur $]-\infty;0]$, $\mathcal{C}_f$ semble être située sous l'axe des abscisses (conjecture 2)

sur $[0;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ semble être située au-dessus de l'axe des abscisses.

Partie B.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$:

f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

on pose $u(x) = x^2$ $v(x) = e^{x-1}$

$u'(x) = 2x$ $v'(x) = e^{x-1}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $f'(x) = 2x e^{x-1} + x^2 e^{x-1} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$

$= x(2e^{x-1} + x e^{x-1} - 1)$

d'où : $f'(x) = x\left(\underbrace{e^{x-1}(x+2) - 1}_{= g(x)}\right)$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = +\infty$

} Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^{x-1} = +\infty$

Donc : par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^{x-1} - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty$

} Par produit, on a une FI du type "$0 \times \infty$"

$(x+2)e^{x-1} - 1 = xe^{x-1} + 2e^{x-1} - 1$

$= xe^{x} \times e^{-1} + 2e^{x-1} - 1$

or, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$, par croissance comparée.

de plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{x-1} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x}e^{-1} + 2e^{x-1} - 1 = -1 = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$

On pose $u(x) = x + 2$ $\quad v(x) = e^{x-1}$

$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = e^{x-1}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = e^{x-1}(1 + x + 2)$

donc : $g'(x) = (x+3)e^{x-1}$

- $e^{x-1} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $x + 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3$

} d'où : $g'(x) \geqslant 0$, pour $x \geqslant -3$

et $g'(x) < 0$, pour $x < -3$

c) D'après b),

. g est décroissante sur $]-\infty ; -3]$

. g est croissante sur $[-3 ; +\infty[$

Tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-1	$\searrow$	$\simeq -1{,}02$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-3) = (-3+2)e^{-4} - 1$
$= -e^{-4} - 1$
$= -\dfrac{1}{e^4} - \dfrac{e^4}{e^4} = \dfrac{-1-e^4}{e^4} \simeq -1{,}02 < 0$

d) g étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après les variations, sur $]-\infty ; -3]$, $g(x) < 0$.

sur $[-3 ; +\infty[$:

. g est croissante

. $g(-3) \simeq -1{,}02 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

d'où : $0 \in [g(-3) ; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α
dans $[-3 ; +\infty[$

comme $g(x) < 0$ sur $]-\infty ; -3]$,
l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

e) On admet que $\alpha \in [0 ; 1]$:
A l'aide de la calculatrice, en procédant par balayage avec une précision de 10^{-2} :

$0{,}20 < \alpha < 0{,}21$ (car $g(0{,}20) \simeq -0{,}011 < 0$
et $g(0{,}21) \simeq 0{,}003 > 0$)

f) Sur $]-\infty ; \alpha]$, $g(x) \leq 0$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3) Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$:

a) D'après 1) partie B, $f'(x) = x\,g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) . Sur $]-\infty\,;0] \cup [\alpha\,;+\infty[$, f est croissante

. Sur $[0\,;\alpha]$, f est décroissante.

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$ } Par produit, on a une FI du type "$\infty \times 0$"

$$x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2} = x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

et, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty$, par somme, on a une FI du type "$\infty - \infty$"

$$x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2} = x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} - \frac{1}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ } Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

c) La conjecture 1 est donc fausse, puisque sur $[0\,;\alpha] \subset [-3\,;2]$ f est décroissante

Partie (C) :

1) $f(\alpha) = \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2}$

or, $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha+2)e^{\alpha-1} - 1 = 0$

$\iff e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$

d'où : $f(\alpha) = \alpha^2 \times \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2}$

$= \frac{2\alpha^2}{2(\alpha+2)} - \frac{\alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)}$

$= \frac{\cancel{2\alpha^2} - \alpha^3 - \cancel{2\alpha^2}}{2(\alpha+2)} = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

2) sur $[0;1]$, $h(x) = \frac{-x^3}{2(x+2)}$

a) h est définie et dérivable sur $[0;1]$
(car un quotient est dérivable partout où il est défini)

On pose $u(x) = -x^3$ $\quad v(x) = 2x+4$

$u'(x) = -3x^2 \quad v'(x) = 2$

or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

d'où $h'(x) = \frac{-3x^2(2x+4) + x^3 \times 2}{(2(x+2))^2}$

$= \frac{-6x^3 - 12x^2 + 2x^3}{4(x+2)^2}$

$= \frac{-4x^3 - 12x^2}{4(x+2)^2} = \frac{\cancel{4}x^2(-x-3)}{\cancel{4}(x+2)^2} = \frac{x^2(-x-3)}{(x+2)^2}$

sur $[0;1]$: $x^2 \geq 0$, $(x+2)^2 > 0$

$0 \le x \le 1$, d'où $-1 \le -x \le 0$

et $-4 \le -x-3 \le -3$

donc : $h'(x) \le 0$, pour tout $x \in [0;1]$

b) D'après a), h est décroissante sur $[0;1]$

c) Comme $\alpha \in [0;1]$, $h(1) \le h(\alpha) \le h(0)$ (car h décroissante sur $[0;1]$)

$$\iff \frac{-1}{6} \le \underbrace{h(\alpha)}_{= f(\alpha)} \le 0$$

c'est-à-dire : $f(\alpha) \le 0$

d) La conjecture ② est donc fausse également car f change de signe sur $[0;1]$

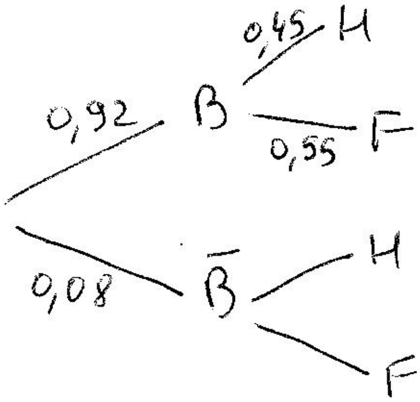
$\mathcal{C}_f$ n'est donc pas située au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 3 :

1) $P(F) = 0,52$ $\quad P(B) = 0,92$

$P_B(F) = 0,55$

2)



3) a) $P(F\cap B) = P(B)\times P_B(F) = 0,92 \times 0,55 = 0,506$

4) $P_F(B) = \dfrac{P(B\cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,506}{0,52} \simeq 0,973$

5) $P(H \cap \overline{B}) = ?$

$P(H) = P(H \cap B) + P(H \cap \overline{B})$ (car $\{B ; \overline{B}\}$ est un système complet d'événements)

or, $P(H) = 0,48$ et $P(H \cap B) = 0,45 \times 0,92 = 0,414$

d'où : $P(H \cap \overline{B}) = 0,48 - 0,414$
$= 0,066$

$P_H(\overline{B}) = \dfrac{P(H \cap \overline{B})}{P(H)} = \dfrac{0,066}{0,48} = 0,1375$ Probabilité que la personne choisie ne consomme pas de produits bio sachant que c'est un homme.

Partie (B) :

1) On assimile ce sondage à un tirage avec remise.
On répète 2000 fois, de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (– Succès : la personne consomme des produits bio
– Echec : la personne ne consomme pas de produits bio)
On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli.
X : variable aléatoire qui compte les succès à l'issue du sondage.
Alors X suit $B(2000 ; 0,75)$ $\begin{cases} n = 2000 \\ p = 0,75 \end{cases}$

2) $E(X) = n \times p = 2000 \times 0,75 = 1500$
1500 personnes en moyenne ont consommé des produits bio au moins une fois par mois.

3) 75% de 2000 = 1500
$P(X \geq 1500) = 1 - P(X < 1500)$
$= 1 - P(X \leq 1499)$
A l'aide de la calculatrice : $P(X \geq 1500) \simeq 0,512$

4) $P(1000 \leq X \leq 1535) = P(X \leq 1535) - P(X \leq 999)$ (à l'aide de la calculatrice)
$\simeq 0,967 \geq 0,95$
Donc : $[1000 ; 1535]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95%

5) a) Au seuil de 95 % :

A la calculatrice, on détermine le plus petit entier naturel a

tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$

et le plus petit entier naturel b tel que :

$P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

On trouve $\begin{cases} a = 1462 \\ b = 1538 \end{cases}$

$I = [1462 ; 1538]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %

b) $1421 \notin I$

Donc, au seuil de 95 %, l'affirmation du chef de rayon n'est plus correcte.

Exercice (4) :

$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}9u_n + 42 \\ u_0 = 280 \end{cases}$

1) $u_1 = 0{,}9 \times u_0 + 42 = 0{,}9 \times 280 + 42 = 294$

En février 2019, 294 véhicules ont été loués

2) Par récurrence :

* Initialisation : on a $u_0 = 280 \leq u_1 = 294 < 420$

d'où : $u_0 \leq u_1 < 420$

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $u_k \leq u_{k+1} < 420$

d'où $0{,}9u_k \leq 0{,}9u_{k+1} < \underbrace{0{,}9 \times 420}_{378}$

donc $\underbrace{0{,}9u_k + 42}_{u_{k+1}} \leq \underbrace{0{,}9u_{k+1} + 42}_{u_{k+2}} < 378 + 42 = 420$

D'où la propriété est héréditaire.

* Conclusion :

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) comme $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
alors (u_n) est croissante
De plus, (u_n) est majorée par 420

Théorème de convergence monotone
Toute suite croissante et majorée est convergente

Donc : (u_n) est convergente

4) $v_n = u_n - 420$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0{,}9u_n + 42 - 420$
$= 0{,}9u_n - 378$
$= 0{,}9(v_n + 420) - 378$
$= 0{,}9v_n + \underbrace{0{,}9 \times 420 - 378}_{=0}$
$= 0{,}9v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$

b) Comme (v_n) est géométrique,
$v_n = v_0 \times q^n$
$= -140 \times 0{,}9^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

or, $u_n = v_n + 420$
$= -140 \times 0{,}9^n + 420$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) comme $-1 < 0{,}9 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Par produit, puis par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 420$

Pour un nombre de mois suffisamment élevé, le nombre de voitures louées se stabilise autour de 420.

6) a)

```
N ← 0
U ← 280
Tant que U ≤ 380
    N ← N+1
    U ← 0,9×U + 42
FinTantque
```

b) A l'aide de la calculatrice :

on trouve $N = 12$

c) La commune devra augmenter le nombre de voitures un an après, en janvier 2020