

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

Un logiciel de calcul formel donne ceci pour cette fonction :

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x^2}{2} \cdot \exp(-x) \\ \rightarrow f(x) &:= \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \\ \text{Simplifier(Dérivée(Dérivée(f(x), x)))} \\ \rightarrow \frac{x^2 - 4x + 2}{2e^x} \end{aligned}$$

1) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ en justifiant.

D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2e^x}$

$2e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Déterminons les racines de $x^2 - 4x + 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8 > 0$$

Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 1 > 0$

Donc le signe de $x^2 - 4x + 2$ (donc de $f''(x)$)

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
signe de $f''(x)$	+	-	+	+

Donc f est convexe sur $]-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; +\infty[$

f est concave sur $[2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$

2) En déduire le calcul des coordonnées d'éventuels points d'inflexion de la courbe de f .

f'' s'annule et change de signe en $2 - \sqrt{2}$ et en $2 + \sqrt{2}$

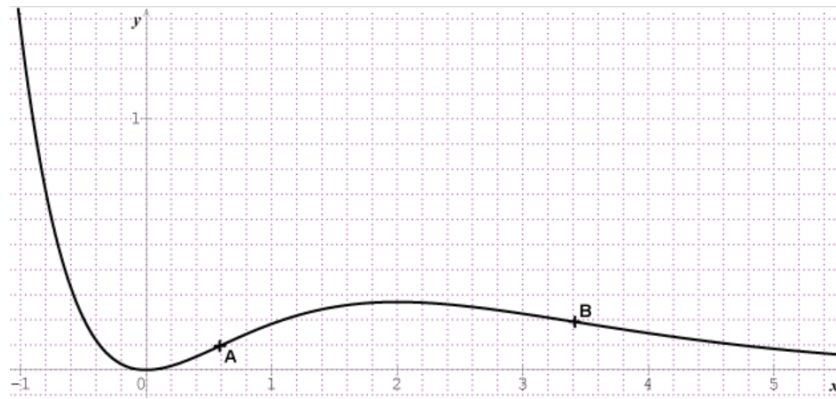
Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion : $A(2 - \sqrt{2}; f(2 - \sqrt{2}))$

$B(2 + \sqrt{2}; f(2 + \sqrt{2}))$

$$f(2 - \sqrt{2}) = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} e^{-(2 - \sqrt{2})} \approx 0,096$$

$$\text{et } f(2 + \sqrt{2}) = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} e^{-(2 + \sqrt{2})} \approx 0,192$$

courbe de f



Exercice 2 :

Soient $A(5; -2; 1)$ et $B(-2; 3; -4)$, deux points de l'espace.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = 12 + 2k \\ y = -7 - 3k \\ z = 6 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Etudier la position relative des deux droites (AB) et (d) en justifiant.

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$z_{\vec{u}} = 1$ et $z_{\vec{AB}} = -5$, d'où $-5z_{\vec{u}} = -5 = z_{\vec{AB}}$

or, $-5y_{\vec{u}} = -5 \times (-3) = 15 \neq y_{\vec{AB}}$

Donc: $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires

Autrement dit: (AB) et (d) ne sont ni confondues, ni parallèles

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB):

Soit $M(x; y) \in (AB)$:

$\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires:

$$\vec{AM} = t \vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -7t \\ y + 2 = 5t \\ z - 1 = -5t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 7t \\ y = -2 + 5t \\ z = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Supposons que (d) et (AB) soient sécantes.

Notons $N(x; y)$ le point d'intersection:

Alors: $\begin{cases} 12 + 2k = 5 - 7t \\ -7 - 3k = -2 + 5t \\ 6 + k = 1 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 7t = -7 \\ -3k - 5t = 5 \\ k + 5t = -5 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$

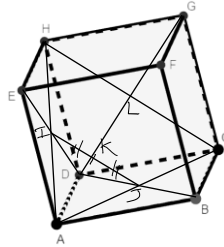
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7t = -7 \\ -5t = 5 \\ -2k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = 0 \end{cases}$$

$R=0$: $N \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ est le point d'intersection des droites (d) et (AB)

Exercice 3 :

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE. J celui de la face ABCD.

K est le milieu de [IJ]



On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

1) Déterminer les coordonnées des points D, G, I, J et K dans ce repère.

$$\underline{D(0; 1; 0)}, \underline{G(1; 1; 1)}, \underline{I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})}, \underline{J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)}$$

$$K \text{ est le milieu de } [IJ], \text{ d'où } \begin{cases} x_K = \frac{x_I + x_J}{2} = \frac{1}{4} \\ y_K = \frac{y_I + y_J}{2} = \frac{1}{2} \\ z_K = \frac{z_I + z_J}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ donc } \underline{K(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4})}$$

2) Montrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{or, } \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de } \overrightarrow{AK} \text{)}$$

$$\underline{\text{Donc: } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}}$$

3) En déduire que $K \in (ADG)$

D'après 2), $\overrightarrow{AK}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$

D'où : les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires
c'est-à-dire les points A, D, K et G coplanaires

Donc, en particulier, $K \in (ADG)$

4) On considère le point L, centre de la face DCGH

Montrer que K est le milieu de [AL]

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$,

$$L\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$$

coordonnées de K : $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

$$\text{milieu de } [AL] : \begin{cases} \frac{x_A + x_L}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = x_K \\ \frac{y_A + y_L}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = y_K \\ \frac{z_A + z_L}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = z_K \end{cases}$$

Donc: K est le milieu de [AL]