Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé de l'évaluation de mathématiques :** *Utilisation du corollaire du TVI / Etude de fonction*	Fait le vendredi 15/01/2021

Exercice 1 :

1) Montrer **soigneusement** que l'équation $e^{-5x} - 2 = 0$

admet une unique solution dans l'intervalle [-1 ; 0]

On pose $f(x) = e^{-5x} - 2$

f est définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, d'où en particulier sur $[-1;0]$

$f'(x) = -5e^{-5x}$

or, $e^{-5x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où en particulier sur $[-1;0]$

Comme $-5 < 0$, alors : $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$, d'où également sur $[-1;0]$

Donc f strictement décroissante sur $[-1;0]$

D'autre part, $f(0) = -1$ et $f(-1) = e^{5} - 2 \simeq 146,4 > 0$

c'est-à-dire : $0 \in [f(0); f(-1)]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[-1;0]$

2) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de cette solution à 10^{-3} près.

A l'aide de la calculatrice, on obtient par balayage :

$-0,139 < \alpha < -0,138$ (à 10^{-3} près)

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{4}(2x+3)e^{2x} + 1$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

par produit :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}(2x+3)e^{2x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{4}(2x+3)e^{2x} + 1 = +\infty$

2) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *(on rappelle que : $\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = 0$)*

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}(2x+3) = -\infty$

et $\lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

d'où par composée : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

Par produit, on a une FI du type " $\infty \times 0$ "

or, $f(x) = \frac{1}{4}\times 2x e^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + 1$

on pose $X = 2x$

$\lim_{X\to-\infty} X e^{X} = 0$, d'où $\lim_{x\to-\infty} 2x e^{2x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4}e^{2x} = 0$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu (faire une phrase)

Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$

3) Montrer que $f'(x) = (x+2)e^{2x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

on pose $u(x) = 2x+3$ $u'(x) = 2$

$v(x) = e^{2x}$ $v'(x) = 2e^{2x}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où $f'(x) = \frac{1}{4}\left(2e^{2x} + (2x+3)\times 2e^{2x}\right)$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{(2x+3)}{2}e^{2x}$

$= e^{2x}\left(\frac{1}{2} + \frac{2x+3}{2}\right) = e^{2x}\left(\frac{\cancel{2}(x+2)}{\cancel{2}}\right)$

donc : $f'(x) = (x+2)e^{2x}$

4) En déduire les variations de f sur ℝ (On dressera le tableau de variation complet)

$e^{2x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$
} d'où $f'(x) \geqslant 0$, pour $x \geqslant -2$

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	$\frac{4-e^{-4}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = \frac{1}{4}(-4+3)e^{-4}+1$
$= -\frac{e^{-4}}{4} + \frac{4}{4}$
$= \frac{4-e^{-4}}{4}$

5) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_0) à la courbe de f au point d'abscisse 0

$(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

or, $f'(0) = 2e^0 = 2$

et $f(0) = \frac{1}{4} \times 3e^0 + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

Donc : $\boxed{y = 2x + \frac{7}{4}}$ Equation réduite de (T_0)