

Spé Maths Terminale (M Mangeard)	Corrigé de l'évaluation n°4 : <i>Limites de fonctions : Asymptotes/Calculs de limites</i>	Fait le jeudi 26 novembre 2020
--	---	-----------------------------------

Exercice 1 :

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
Variations de f	$1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow 3 \searrow$	0

Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe de f en justifiant par des limites

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$

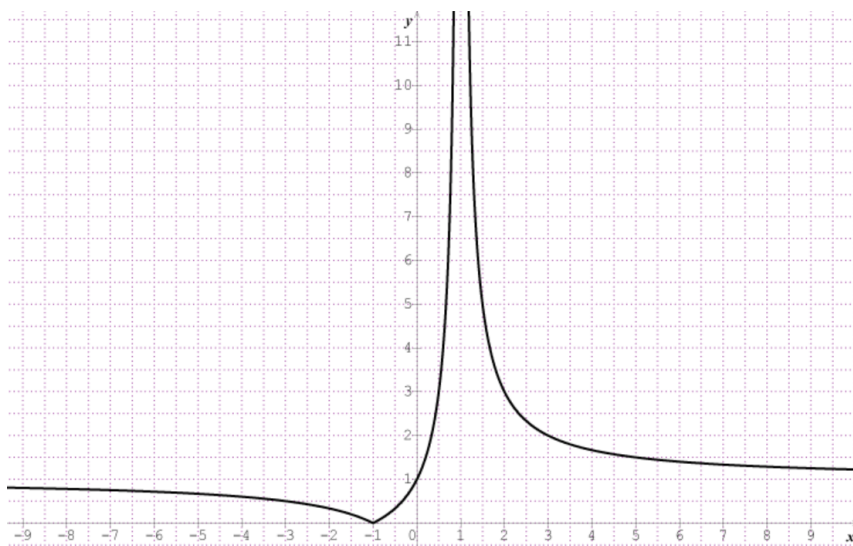
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ (= l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

$\Leftrightarrow$ la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f

Exercice 2 :

Voici la courbe d'une fonction dans un repère du plan :



1) Par lecture graphique, conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$$

Par lecture graphique: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$

2) En déduire les asymptotes éventuelles à (C_f)

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, alors la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C_f)

comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x > 1} f(x)$, alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f)

Exercice 3 : Calculs de limites

Calculer les limites suivantes en justifiant :

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x - 1}{-2x^3 + 5}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$

Par somme: nous avons une FI du type " $\infty - \infty$ "

$$\frac{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(-2 + \frac{5}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3} = 0$$

Par somme: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 + \frac{5}{x^3} = -2$

Par quotient: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{-2 + \frac{5}{x^3}} = -\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Par composition: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ de même: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

Par différence: on a une FI du type " $\infty - \infty$ "

$$\begin{aligned} \text{or, } \sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} &= \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+3 - (x+1)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = +\infty$

Par quotient: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{x}}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, d'où par composition: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{x}} = 0$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x^2 + x}{x-3}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} 2x^2 + x = 2 \times 3^2 + 3 = 21$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} x - 3 = 0^-$$

Par quotient :
c en appliquant la règle des signes
du quotient)
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x^2 + x}{x-3} = -\infty$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - x - 10 = 3 \times 2^2 - 2 - 10 = 12 - 2 - 10 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$$

Par quotient, on a une FI du type
" $\frac{0}{0}$ "

On considère le trinôme $3x^2 - x - 10$ avec $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -10 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-10)$$

$= 1 + 120 = 121 > 0$: le trinôme a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 11}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 11}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$3x^2 - x - 10 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 2)\left(x + \frac{5}{3}\right)$$

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x-2} = \frac{3\cancel{(x-2)}\left(x + \frac{5}{3}\right)}{\cancel{x-2}} = 3\left(x + \frac{5}{3}\right) = 3x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 5 = 3 \times 2 + 5 = 11$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x-2} = 11$$