

Spé Maths Terminale (M Mangeard)	Corrigé de l'évaluation n° 3 : Dénombrements / Rappels et compléments sur la fonction exponentielle	Fait le vendredi 13 novembre 2020
--	--	---

Exercice 1 : (4 pts)

On considère un ensemble $E = \{a; b; c\}$

- 1) Déterminer le nombre total de sous-ensembles de E et les donner explicitement.

$\text{card}(E) = 3$ - Le nombre total de sous-ensembles de E est $2^{\text{card}(E)} = 2^3 = 8$
 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, E$
 Tous les sous-ensembles de E

- 2) Déterminer le nombre de permutations de E et les donner.

Il y a $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ permutations de E
 $(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a)$

- 3) Déterminer le nombre de sous-ensembles à deux éléments et les donner.

Il y a $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$ sous-ensembles à deux éléments
 $\{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}$

- 4) Déterminer le nombre de couples de E et les donner.

Il y a : $3^2 = 9$ couples d'éléments de E (⚠ il peut y avoir des couples d'éléments identiques)
 $(a; a), (b; b), (c; c), (a; b), (a; c), (b; a), (b; c)$
 $(c; a), (c; b)$

Exercice 2 : (4 pts)

On cherche à constituer un groupe de six personnes choisies par vingt-cinq femmes et trente-deux hommes.

- 1) Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ?

Cela consiste à compter le nombre de sous-ensemble à six éléments dans un ensemble à $25 + 32 = 57$ éléments.
 Il y en a $\binom{57}{6} = \frac{57!}{6!(57-6)!} = \frac{57!}{6! \cdot 51!} = 36\,288\,252$

NOM : Prénom :

2) Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ?

Il faut donc compter le nombre de sous-ensembles à six éléments dans un ensemble à trente-deux éléments (= le nombre d'hommes)

$$\text{Il y en a : } \binom{32}{6} = \frac{32!}{6!(32-6)!} = \underline{906\,192}$$

3) Combien y en a-t-il ne comportant que des personnes de même sexe ?

$$\text{Il y en a : } \underbrace{\binom{32}{6}}_{\text{que des hommes}} + \underbrace{\binom{25}{6}}_{\text{que des femmes}} = \underline{1\,083\,292}$$

4) Combien y en a-t-il comportant au moins une femme et au moins un homme.

Il y en a $\binom{32}{6}$ qui ne contiennent aucune femme et $\binom{25}{6}$ qui ne contiennent aucun homme

Donc : il y en a $\binom{57}{6} - \left[\binom{32}{6} + \binom{25}{6} \right]$ qui contiennent au moins une femme et au moins un homme.

$$\begin{aligned} \text{c'est-à-dire : } & 36\,288\,252 - 906\,192 - 147\,100 \\ & = \underline{35\,204\,960} \end{aligned}$$

Exercice 3 : (12 pts)

1) On considère l'expression : $A = (e^{3x} + e^{-x})^3$

a) A l'aide du triangle de Pascal, déterminer les coefficients du développement de $(a + b)^3$

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & (a+b)^0 \\ 1 & & & & & & (a+b)^1 \\ 1 & 1 & & & & & (a+b)^2 \\ 1 & 2 & 1 & & & & (a+b)^3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & (a+b)^4 \end{array}$$

$$(a + b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2b + 3.ab^2 + 1.b^3$$

b) Développer et réduire A en utilisant a)

$$\begin{aligned} A &= (e^{3x})^3 + 3(e^{3x})^2 e^{-x} + 3e^{3x} (e^{-x})^2 + (e^{-x})^3 \\ &= e^{9x} + 3e^{6x-x} + 3e^{3x-2x} + e^{-3x} \\ &= e^{9x} + 3e^{5x} + 3e^x + e^{-3x} \end{aligned}$$

NOM : Prénom :

2) Résoudre $e^{4x+3} > 1$

$$e^{4x+3} > e^0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 4x+3 > 0 \quad (\text{car } e^a > e^b \Leftrightarrow a > b)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 4x > -3$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x > -\frac{3}{4}$$

Donc: $S =]-\frac{3}{4}; +\infty[$

3) Soit $f(x) = e^{2x}(x^2 - 1)$

et $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$

Calculer f' et g' en détaillant.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 Posons $u(x) = e^{2x}$ $v(x) = x^2 - 1$
 $u'(x) = 2e^{2x}$ $v'(x) = 2x$
 or, $(uv)' = u'v + uv'$
 $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 - 1) + 2xe^{2x}$
 $= 2e^{2x}(x^2 + x - 1)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$
 on pose $u(x) = e^x$ $v(x) = e^x + 3$
 $u'(x) = e^x$ $v'(x) = e^x$
 or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 D'où: $g'(x) = \frac{e^x(e^x + 3) - (e^x)^2}{(e^x + 3)^2}$
 $= \frac{\cancel{e^{2x}} + 3\cancel{e^x} - e^{2x}}{(e^x + 3)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 3)^2}$

4) Soit $h(x) = e^{3x^2+2x-1}$

a) Calculer h'

h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 On pose $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$
 $u'(x) = 6x + 2$
 or, $(e^u)' = u' e^u$
 D'où $h'(x) = (6x + 2)e^{3x^2+2x-1}$

b) En déduire les variations de h (on dressera le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$)

$e^{3x^2+2x-1} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $6x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

D'où le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
signe de $h'(x)$	-	0	+
Variations de h	$-\infty$		$+\infty$

$e^{-\frac{4}{3}} \approx 0,26$

$h\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1}$
 $= e^{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$