

Spé Maths Terminale (M Mangeard)	<u>Corrigé du contrôle de</u> <u>mathématiques :</u> <i>Cours sur les limites / Théorèmes / Calculs de limites</i>	Fait le vendredi 02/10/2020
--	--	-----------------------------------

Exercice 1 : COURS

1) Compléter le tableau suivant :

Valeurs de q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

2) Démontrer soigneusement le cas $q > 1$ (on suppose admise l'inégalité de Bernoulli) :

comme $q > 1$, il existe $a > 0$, tel que $q = 1 + a$

D'après l'inégalité de Bernoulli: $(1+a)^n \geq 1 + na$

Or, $q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$ (car $a > 0$), d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$

D'après un théorème de comparaison: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

3) Énoncer clairement le théorème d'encadrement :

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$, trois suites telles qu'à partir d'un certain rang

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$, $L \in \mathbb{R}$

Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

4) Donner la définition mathématique de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$,
 $u_n > A$

Exercice 2 :

Calculer les limites des suites suivantes en justifiant :

1) $u_n = 4n^3 - 7n + 3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -7n = -\infty$$

Par somme: on a une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ "

$$4n^3 - 7n + 3 = n^3 \left(4 - \frac{7n}{n^3} + \frac{3}{n^3} \right)$$

$$= n^3 \left(4 - \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^3} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^3} = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty, \text{ d'où par produit: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(4 - \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right) = +\infty$$

$$2) v_n = \frac{5n^2 + 2}{4n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 = +\infty, \text{ d'où, par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 2 = +\infty \left. \begin{array}{l} \text{Par quotient, on a une} \\ \text{forme indéterminée} \\ \text{du type } \frac{\infty}{\infty} \end{array} \right\}$$

$$\text{de même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 1 = +\infty$$

$$\frac{5n^2 + 2}{4n^2 + 1} = \frac{n^2 \left(5 + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(4 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{Par somme: } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{2}{n^2} = 5$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{1}{n^2} = 4$$

$$\text{Par quotient: } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{5}{4}$$

$$3) w_n = (-1)^n + 5n^2$$

$$\text{On a: } (-1)^n \geq -1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } \underbrace{(-1)^n + 5n^2}_{w_n} \geq 5n^2 - 1$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 = +\infty, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 - 1 = +\infty$$

$$\text{D'après un théorème de comparaison, } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$$

$$4) x_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + 1}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1$$

d'où :

$$-\frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = +\infty, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$$

D'après le théorème d'encadrement,
 (x_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

$$5) y_n = n^2 \times \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$$

$$\text{d'où par quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$$

Par produit: on a une forme indéterminée du type " $0 \times \infty$ "

$$y_n = n^2 \times \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2} \right)$$

$$= \frac{n^2}{n^2+1} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1, \quad \text{par quotient, on a une forme indéterminée du type } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{\cancel{n^2}}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1, \quad \text{d'où par quotient: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

Par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 4$