Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**<u>Corrigé du devoir de mathématiques :</u>** *Primitives, fonction ln, géométrie dans l'espace*	Fait le lundi 03 mai 2021

<u>Exercice 1 : Primitives</u>

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes :

1) Soit $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Déterminer toutes les primitives de f sur ℝ

f est définie sur ℝ, car $x^2+1 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
f est également continue sur ℝ, car un quotient est continu partout où il est défini.

Elle y admet donc des primitives :

Si on pose $u(x) = x^2+1$, alors $u'(x) = 2x$
D'où $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Or, $\frac{u'}{u}$ se primitive en $\ln(u)$

Donc $F(x) = \ln(x^2+1) + k$, $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur ℝ

2) Soit $g(x) = 3x^2e^{x^3}$. Déterminer la primitive G de g sur ℝ telle que : $G(1) = \frac{1}{2}$

g est continue sur ℝ car c'est le produit de fonctions continues sur ℝ
Elle y admet donc des primitives.
Si on pose $u(x) = x^3$, alors $u'(x) = 3x^2$
et $g(x) = u'(x)e^{u(x)}$
Or, $u'e^u$ se primitive en e^u
donc $G(x) = e^{x^3} + k$, k étant une constante réelle
$G(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^1 + k = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - e = \frac{1-2e}{2}$

Donc : $G(x) = e^{x^3} + \frac{1-2e}{2}$

3) Soit $h(x) = \frac{5x}{(2x^2+7)^2}$. Déterminer une primitive de h sur ℝ

$2x^2+7 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $(2x^2+7)^2 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
h est définie et continue sur ℝ : elle y admet donc des primitives.
Si on pose $u(x) = 2x^2+7$ $u'(x) = 2\times 2x = 4x$
d'où : $h(x) = \frac{u'(x)\times\frac{5}{4}}{(u(x))^2} = \frac{5}{4} \times \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$, or $\frac{u'}{u^2}$ se primitive en $-\frac{1}{u}$

D'où : $H(x) = -\frac{1}{2x^2+7} \times \frac{5}{4} = -\frac{5}{4(2x^2+7)}$ est une primitive de h sur ℝ

Exercice 2 : Fonction ln

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur]0 ;+∞[par g(x) = ln(x) + 2x – 2

1) Déterminer les limites de g en +∞ et en 0

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2x = 0$, par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty$

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur]0 ;+∞[

g est dérivable sur]0;+∞[, car c'est la somme de fonctions dérivables sur]0;+∞[

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1+2x}{x}$

sur]0;+∞[, $x > 0$ et $1+2x > 0$, d'où, $g'(x) > 0$

c'est-à-dire : g strictement croissante sur]0;+∞[

3) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α sur]0 ;+∞[

* g est continue sur]0;+∞[car c'est la somme de fonctions continues sur]0;+∞[
* g est strictement croissante sur]0;+∞[(d'après la question 2)
* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (d'après la question 1)

Or, $0 \in]\underbrace{-\infty}_{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x)} ; \underbrace{+\infty}_{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans]0;+∞[

4) Calculer g(1), puis déterminer le signe de g sur]0 ;+∞[

$g(1) = \ln(1) + \cancel{2} - \cancel{2} = 0$, donc $\alpha = 1$

Or, g est strictement croissante sur]0;+∞[, donc :

$g(x) \leq 0$, pour $x \in]0;1]$

$g(x) > 0$, pour $x \in]1;+\infty[$

Partie B : Etude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur]0 ;+∞[par : f(x) = $(2 - \frac{1}{x})$ (ln(x) – 1)

1) a) On admet que la fonction f est dérivable sur]0 ;+∞[et on note f ’ sa dérivée.

Démontrer que pour tout x ∈]0 ;+∞[, on a : f ’(x) = $\frac{g(x)}{x^2}$

f est dérivable sur]0 ;+∞[car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur]0 ;+∞[

on pose $u(x) = 2 - \frac{1}{x}$ $\quad v(x) = \ln(x) - 1$

$u'(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 1) + \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{x}\right)$

$= \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \underline{\frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur]0 ;+∞[. Le calcul des limites n’est pas demandé.

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $g(x) \geq 0$, pour $x \in]1 ;+\infty[$
$g(x) < 0$, pour $x \in]0 ; 1[$ (d'après question ④ partie Ⓐ)

or, $x^2 > 0$, pour tout $x \in]0 ;+\infty[$

Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $g(x)$

D'où le tableau de variations de f sur]0 ;+∞[:

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		↘	-1	↗	

$f(1) = (2-1)(\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1)$
$= -1$

2) Résoudre l’équation f(x) = 0 sur]0 ;+∞[, puis dresser le tableau de signes de f sur]0 ;+∞[.

$f(x) = 0 \iff \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0$

$\iff 2 - \frac{1}{x} = 0$ ou $\ln(x) - 1 = 0$

$\iff \frac{1}{x} = 2$ ou $\ln(x) = 1$

$\iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = e$

or, $\frac{1}{2} \in]0 ;+\infty[$ et $e \in]0 ;+\infty[$, donc $\underline{S = \left\{\frac{1}{2} ; e\right\}}$

$2 - \frac{1}{x} \geq 0 \iff \frac{1}{x} \leq 2$ et $\ln(x) - 1 \geq 0$

$\iff x \geq \frac{1}{2}$ $\quad \iff \ln(x) \geq 1$

$\iff x \geq e$ (car $\ln(a) \geq \ln(b) \iff a \geq b$; $a, b > 0$)

Tableau de signe de f sur]0 ;+∞[

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
signe de $2 - \frac{1}{x}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\ln(x) - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie C : Etude d'une fonction F admettant f comme dérivée

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur]0 ;+∞[, dont la dérivée est f. Ainsi, on a : F ' = f

On note (C_F) la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On ne cherche pas à déterminer une expression de F(x)

1) Etudier les variations de F sur]0 ;+∞[

Comme $F'(x) = f(x)$ sur $]0;+\infty[$ et que $f(x) \geq 0$, pour $x \in]0;\frac{1}{2}] \cup [e;+\infty[$
$f(x) < 0$, pour $x \in]\frac{1}{2};e[$ (question 2 partie B)

Donc : F est croissante sur $]0;\frac{1}{2}] \cup [e;+\infty[$
F est décroissante sur $]\frac{1}{2};e[$

2) La courbe (C_F) de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

Soit (T_a) une tangente à (C_F) au pt d'abscisse a avec (T_a) parallèle à l'axe des abscisses.

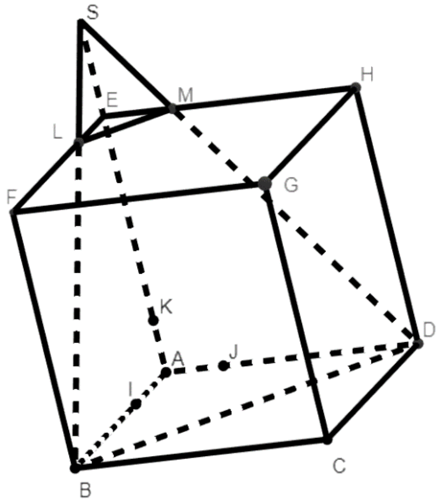
alors : $F'(a) = 0$
$\Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ ou e (d'après la question 2 partie B)

Donc (C_F) admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses en $\frac{1}{2}$ et en e

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6m d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous :



On munit l'espace du repère orthonormé $(A ;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$ tels que :

AI = AJ = AK = 1. Les points I, J et K appartiennent respectivement aux segments [AB], [AD] et [AE].

L'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis par :

- $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH)
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK)

1) Sans calcul de coordonnées, en utilisant les plans (EFG) et (ABC), montrer que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

$(LM) \subset (EFG)$ et $(BD) \subset (ABC)$

Or, (EFG) et (ABC) sont deux plans parallèles car ils contiennent respectivement deux faces opposées du cube.

De plus, (LM) et (BD) appartiennent au plan (BSD) : elles sont donc coplanaires

Donc : $(LM) // (BD)$

2) Démontrer que les coordonnées du point L sont (2 ;0 ;6)

$\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} \Leftrightarrow \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE})$ (Relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) + \frac{2}{3} \times 6\overrightarrow{AK}$

$= \frac{1}{3} \times 6\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{AK}$

$= 2\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3} \times 6\overrightarrow{AK} + 4\overrightarrow{AK}$

$= 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AK} + 4\overrightarrow{AK}$

$= 2\overrightarrow{AI} + 0\overrightarrow{AJ} + 6\overrightarrow{AK}$

Donc : L a pour coordonnées $(2;0;6)$

3) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL)

soit $N(x;y;z) \in (BL)$

$\overrightarrow{BN}(x-6; y-0; z-0)$ $\quad \overrightarrow{BL}(2-6; 0-0; 6-0)$

$(-4; 0; 6)$

B, N, L sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BL}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = -4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6-4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Représentation paramétrique de la droite (BL)

On admet que les coordonnées du point S sont (0 ;0 ;9)

4) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ;3 ;2)

a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL)

On a : $B(6;0;0)$ et $D(0;6;0)$, d'où $\overrightarrow{BD}(-6;6;0)$

de plus, $\overrightarrow{BL}(-4;0;6)$

B, D, L non alignés, d'où $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont non-colinéaires

Ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan (BDL)

et $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = \cancel{3\times(-6)} + \cancel{3\times 6} + 2\times 0 = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BL} = \cancel{3\times(-4)} + 3\times 0 + \cancel{2\times 6} = 0 \end{cases}$

$\vec{n}$ est donc un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BDL)

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL)

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est : 3x + 3y + 2z – 18 = 0

$\vec{n}(3;3;2)$ est un vecteur normal au plan (BDL) (question 4 a)),

Soit $M(x;y;z)$, un point de (BDL)

$\overrightarrow{BM}(x-6;y;z)$

On a : $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux $\iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

$\iff 3(x-6)+3y+2z = 0$

$\iff 3x+3y+2z-18=0$

(équation cartésienne du plan (BDL))

c) On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 6 \end{cases}$, k∈ℝ

Calculer les coordonnées du point M

$M(x;y;z)$ est le point d'intersection entre (EH) et (BDL)

$(x;y;z)$ solution du système suivant :

$\begin{cases} 3x+3y+2z-18=0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y=k \\ z=6 \end{cases}, k\in\mathbb{R} \end{cases}$

$3\times 0 + 3\times k + 12 - 18 = 0 \iff 3k = 6 \iff k = 2$

d'où M a pour coordonnées $(0;2;6)$

5) Calculer le volume du tétraèdre SELM (Bonus)

$V(SELM) = \frac{1}{3}\times \text{Base}\times \text{hauteur}$

$= \frac{1}{3}\times \text{Aire}(\text{triangle}(ELM))\times SE$

or, ELM est un triangle rectangle en E, d'où $\text{Aire}(ELM) = \frac{EL\times EM}{2} = \frac{2\times 2}{2} = 2$

et $SE = 3 (= 9-6)$

d'où : $V(SELM) = \frac{1}{\cancel{3}}\times 2\times\cancel{3} = \boxed{2}\ m^3$

6) **BONUS :** L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°. Cette contrainte d'angle est-elle respectée ? Justifier.

Le triangle SLE est rectangle en E, d'où $\tan \widehat{SLE} = \frac{SE}{EL} = \frac{3}{2}$

d'où $\widehat{SLE} = \tan^{-1}(1{,}5) \simeq 56{,}3° \in [55° ; 60°]$ (⚠ calculatrice en mode degrés)

La contrainte de l'artiste est donc respectée.