| Spé Maths<br>Terminale<br>(M Mangeard) | **<u>Corrigé du DM de mathématiques :</u>**<br>*Géométrie dans l'espace* | Rendu le vendredi 19/02 |
|---|---|---|

L'espace est rapporté au repère $(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points :

A(1 ;2 ;-1) , B(2 ;-1 ;3) , C(2 ;-1 ;1) et D(3 ;-1 ;1)

Voici des représentations paramétriques des droites (d) et (d') :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -6t - 1, t \in \mathbb{R} \\ z = 8t + 3 \end{cases} \qquad (d') : \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - 3k \ , k \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 6k \end{cases}$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse **<u>en justifiant la réponse.</u>**

1) (d) // (AB)

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

(d'après la représentation paramétrique donnée de (d))

or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_{\overrightarrow{AB}} = 2\times 1 = 2 = x_{\vec{u}} \\ 2y_{\overrightarrow{AB}} = 2\times(-3) = -6 = y_{\vec{u}} \\ 2z_{\overrightarrow{AB}} = 2\times 4 = 8 = z_{\vec{u}} \end{cases}, \text{ d'où } 2\overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

c'est-à-dire (d) // (AB)

2) (d') est parallèle au plan (ABC)

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d')

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC)

Supposons qu'il existe deux réels $k_1$ et $k_2$ tels que :

$$\vec{v} = k_1 \overrightarrow{AB} + k_2 \overrightarrow{AC}$$

Alors :

$$\begin{cases} 1 = k_1 + k_2 \\ -3 = -3k_1 - 3k_2 & L_2 \leftarrow L_2/(-3) \\ 6 = 4k_1 + 2k_2 & L_3 \leftarrow L_3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ k_1 + k_2 = 1 \\ 2k_1 + k_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 1 & L_1 \leftarrow -2L_1 \\ 2k_1 + k_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k_1 - 2k_2 = -2 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2k_1 + k_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k_2 = 1 \\ k_1 = \dfrac{3 - k_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = -1 \\ k_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

Donc $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Autrement dit : $\vec{v}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

c'est-à-dire $(d') \parallel (ABC)$

3) Le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB}$$

Donc : D n'est pas l'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

4) (A ;$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) est un repère de l'espace.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$

- Tout d'abord $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
- Supposons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2$, deux réels tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}$$

d'où :

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ -3 = -3\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 2 = 4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \text{contradictoire}$$

Donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires

Autrement dit : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace

Par conséquent : $\underline{(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \text{ est un repère de l'espace}}$

5) Les droites (d') et (AB) sont coplanaires et sécantes

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d')

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (AB)

$\begin{cases} x_{\vec{v}} = x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\vec{v}} = y_{\overrightarrow{AB}} \\ z_{\vec{v}} \neq z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$, d'où $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ non colinéaires

Donc $(d') \not\parallel (AB)$, $(d')$ et $(AB)$ non confondues

Déterminons une représentation paramétrique de (AB) :

Soit $M(x;y;z) \in (AB)$ :

Alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Autrement dit : $\overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{AB}$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} x - 1 = \mu \\ y - 2 = -3\mu \\ z + 1 = 4\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 - 3\mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

Supposons qu'il existe un point $M(x;y;z)$, tel que :

$$\{M\} = (d') \cap (AB)$$

Alors :
$$\begin{cases} 1+\mu = 1+k \\ 2-3\mu = 2-3k \\ -1+4\mu = -3+6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = k \\ 4\mu - 6k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = k \\ 2\mu - 3k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = k \\ -k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

donc : $M \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2-3\times 1 \\ -3+6\times 1 \end{pmatrix}$

$M \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est le point d'intersection de $(d')$ et $(AB)$

Donc : $(d')$ et $(AB)$ sont coplanaires et sécantes