Terminale S (Spécialité)	**Chapitre II : Matrices et opérations**	Année scolaire 2015/2016

I) Généralités sur les matrices :

1) Définition :

Soient n et p, deux entiers naturels non-nuls, **une matrice** de format (n,p) ou de dimension n×p est un tableau de nombres qui contient n lignes et p colonnes.

Notations :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Chaque coefficient est nommé en fonction de sa position dans le tableau : **a_{ij} = coefficient à la ligne i et la colonne j**

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$ est une matrice de format (3,2)

En particulier : $a_{31} = 5$ $a_{12} = 4 = -a_{32}$

On note la matrice A précédente : $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}$

Cas particuliers :

* Si n = 1 : C'est une matrice ligne
* Si p = 1 : C'est une matrice colonne
* Si n = p : C'est une matrice carrée (cas très important : voir III) de ce chapitre)
* Matrice nulle : Tous ses coefficients sont égaux à 0
* Matrice Identité : - C'est une matrice carrée
  - Les coefficients diagonaux valent tous 1
  - Les autres coefficients sont nuls

Explicitement : Pour cette matrice, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$= 1$, sinon

Notation de la matrice identité : I ou I_n si elle possède n lignes et n colonnes

Exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Matrices égales :

Soient n et p, deux entiers naturels.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$

A = B signifie :
qu'elles ont le même format **et** que $a_{ij} = b_{ij}$, pour tout $i\in\{1 ;2 ;...;n\}$ et tout $j\in\{1 ;2 ;...;p\}$

3) Transposée d'une matrice :

Soient n et p, deux entiers naturels.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$. On appelle **transposée de la matrice A** la matrice B telle que :
$b_{ij} = a_{ji}$, pour tout $i\in\{1 ;2 ;...;n\}$ et tout $j\in\{1 ;2 ;...;p\}$

Notations : La transposée de A se note ${}^tA$ ou A^T

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

II) Opérations sur les matrices :

1) Addition de deux matrices :

Soient n et p, deux entiers naturels.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ deux matrices de même format.

On définit la matrice somme $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ notée $C = A + B$

par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pour tout $i\in\{1 ;2 ;...;n\}$ et tout $j\in\{1 ;2 ;...;p\}$

Exemple :

Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & 9 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

On a $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & 6 & 1 \\ -13 & 9 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

2) Multiplication d'une matrice par un réel :

Soient n et p, deux entiers naturels.

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ On définit la matrice $C = \lambda A$

par $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ avec $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, pour tout $i\in\{1 ;2 ;...;n\}$ et tout $j\in\{1 ;2 ;...;p\}$

Cas particulier : Si $\lambda = -1$, on peut définir $A - B$ par $A - B = A + (-1)B$

Exemple :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $C = 5A - 3B$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 30 & -5 \\ 35 & -10 & 0 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 & -18 \\ -3 & 6 & 9 \\ -18 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 42 & -23 \\ 32 & -4 & 9 \\ -13 & 31 & 7 \end{pmatrix}$$

3) Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne :

Soient p et q, deux entiers naturels.

On considère A une matrice ligne $A = (a_{1j})_{1\leq j\leq p} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1p})$

et B une matrice colonne $B = (b_{i1})_{1\leq i\leq q} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{q1} \end{pmatrix}$

On peut effectuer le produit $A \times B$ à condition que $p = q$ (nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B)

Méthode pour effectuer ce produit :

$$(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1p}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{q1} \end{pmatrix} = a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + a_{13}\times b_{31} + \dots + a_{1p}\times b_{q1}$$

Le résultat obtenu est une matrice (1,1) , c'est-à-dire un nombre.

Remarque :

En première S, un cas particulier a été étudié : le produit scalaire de deux vecteurs.

En effet : si $\vec{u}$ (x;y) et $\vec{v}$ (x';y') dans un repère orthonormal du plan, alors $\vec{u} \,.\, \vec{v} = xx' + yy'$

4) Produit de deux matrices :

a) Exemple avec méthode :

Soient n, p, m, q quatre entiers naturels, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ $B = (b_{kl})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le q}}$

Pour pouvoir calculer A×B, il faut quel le nombre de colonnes de A (= p) soit égal au nombre de lignes de B (= m)

La matrice résultat : $C = A \times B$ sera de format (n,q)

On peut disposer les matrices comme suit :

×	B
A	C = A×B

Plus explicitement , pour le calcul de c_{11} :

$$\begin{array}{c|c}
\times & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2q} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mq} \end{pmatrix} \\ \hline
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + a_{13}\times b_{31} + \dots + a_{1p}\times b_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$c_{11} = a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + a_{13}\times b_{31} + \dots + a_{1p}\times b_{m1}$$

Pour calculer c_{21}, on multiplie les termes de la deuxième ligne de A par ceux de la première colonne de B. Et ainsi, on remplit progressivement la matrice produit.

Formule générale de calcul des coefficients :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\times b_{kj} \text{ , pour tout } i\in\{1\,;2\,;\dots;n\} \text{ et tout } j\in\{1\,;2\,;\dots;q\}}$$

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A×B

Tout d'abord, A et B sont deux matrices carrées 3×3 : la condition pour pouvoir effectuer le produit de ces deux matrices est vérifiée.

×	$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\times1+(-1)\times2+0\times0 & 2\times(-5)+(-1)\times(-2)+0\times4 & 2\times1+(-1)\times2+0\times(-3) \\ 1\times1+2\times2+1\times0 & 1\times(-5)+2\times(-2)+1\times4 & 1\times1+2\times2+1\times(-3) \\ 3\times1+5\times2+4\times0 & 3\times(-5)+5\times(-2)+4\times4 & 3\times1+5\times2+4\times(-3) \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } A\times B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \\ 13 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque très importante :
Contrairement au produit dans les réels, **celui des matrices n'est souvent pas commutatif**

$$A\times B \neq B\times A$$

Exemple : reprenons l'exemple précédent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

On a $A\times B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \\ 13 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ mais $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 8 & 4 & 6 \\ -5 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

Par conséquent : $A\times B \neq B\times A$

Cette remarque aura des conséquences dans certaines formules impliquant des matrices.

b) Propriétés du produit matriciel :

- ***Il est associatif :*** Soient A, B et C, trois matrices ayant des formats qui vérifient la condition de calcul des produits matriciels.
  Alors : $\mathbf{(A \times B) \times C = A \times (B \times C)}$
- ***Distributivité de la multiplication sur l'addition :***
  C'est-à-dire : $\mathbf{A \times (B + C) = A \times B + A \times C}$
- ***Soit A une matrice carrée de dimension n^2*** (avec $n \in \mathbb{N}$)
  alors : $\mathbf{A \times I_n = I_n \times A = A}$
  (autrement dit la matrice identité est l'élément neutre de la multiplication pour les matrices carrées)

Exemple : (Formules des identités remarquables)
Soient A et B, deux matrices carrées :
1) $(A + B) \times (A + B) = A \times A + A \times B + B \times A + B \times B$
2) $(A - B) \times (A - B) = A \times A - A \times B - B \times A + B \times B$

Attention : Le produit n'étant souvent pas commutatif, $A \times B + B \times A \neq 2\, A \times B$
Notation : $(A + B) \times (A + B)$ se note $(A + B)^2$ (notation puissance)

III) Matrices carrées :

1) Puissance d'une matrice :

a) Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) (c'est-à-dire : A est de dimension n^2)

Soit $p \in \mathbb{N}$, on définit $A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ facteurs tous égaux à } A}$

Par convention : $A^0 = I$

Remarque : Pour calculer A^3, on utilise l'associativité du produit de matrices :

$A^3 = A \times A \times A = (A \times A) \times A = A^2 \times A = A \times (A \times A) = A \times A^2$

b) Théorème :

Soient a et b, deux réels et p un entier naturel . On pose A la matrice de format (2,2) telle que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Alors $A^p = \begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$

Remarques :

- Ce théorème n'est valable que si A est diagonale
- Il se généralise à toute matrice diagonale d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

Exemple : Si $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, alors $M^n = \boxed{\begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}}$

Ce théorème se démontre par récurrence : (cette question est souvent posée dans les exercices traitant de calculs de puissances de matrices)

- Initialisation : Pour n = 0

$A^0 = I$ et $\begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. D'où la propriété est initialisée.

- Hérédité :

On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $p \in \mathbb{N}$.

On a : $A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{p+1} & 0 \\ 0 & b^{p+1} \end{pmatrix}$ D'où la propriété est héréditaire

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$

Par conséquent : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \boxed{\begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}}$

2) Inverse d'une matrice :

a) Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$

Si il existe une matrice B, carrée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors on dit que la matrice A est inversible et son inverse est la matrice B.

Notation : B se note alors A^{-1}

Remarques :

- On peut trouver des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (voir la suite pour la preuve)

- Si A est inversible, alors A^{-1} est unique (unicité de l'inverse)

b) Cas des matrices 2×2 :

Soient a,b,c,d, quatre réels. On considère M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice carrée d'ordre 2.

On pose det M (=le déterminant de M) = ad – bc

M est inversible ⇔ det M ≠ 0 et dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(On permute les éléments diagonaux et on change le signe des autres)

Exemple :

Montrer que A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}

Réponse : On a det A = 2 × 5 - (-3) × 1 = 13 ≠ 0, donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \times \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}}$$

Vérification : $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{13} + \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} + \frac{2}{13} \\ -\frac{15}{13} + \frac{15}{13} & \frac{3}{13} + \frac{10}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et $A^{-1} \times A = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{13} + \frac{3}{13} & \frac{5}{13} - \frac{5}{13} \\ \frac{6}{13} - \frac{6}{13} & \frac{3}{13} + \frac{10}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Démonstration :

Soit M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que det M = ad – bc ≠ 0

On considère N = $\frac{1}{\det M} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

On a M × N = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{\det M} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{\det M} \times \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - dc & -bc + ad \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \times \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Remarque importante :

Pour les matrices carrées d'ordre strictement supérieur à 2, il n'y a pas de formule au programme.
Pour montrer qu'une telle matrice A est inversible, il suffit de trouver une matrice B telle que :

A × B = I (on se ramène à la définition)

Exemple :

On considère A = $\begin{pmatrix} -7 & 12 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ -12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$

On peut montrer (en utilisant la calculatrice) que :

$$\frac{1}{2}A^3 - 2A^2 + \frac{5}{2}A = I_3$$

D'où : $A \times (\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I_3) = I_3$ (*Remarque :* Ne pas oublier de multiplier $\frac{5}{2}$ par I_3)

On a donc trouvé $B = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I_3$ telle que $A \times B = I_3$

Par conséquent : A est inversible et son inverse est $\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I_3$ (que l'on peut expliciter car nous connaissons les coefficients de A)

c) Théorème :

> Soient A, M et N trois matrices carrées d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ avec A inversible :
> a) Si $A \times M = 0$, alors $M = 0$ (matrice nulle)
> b) Si $A \times M = A \times N$, alors $M = N$

Démonstration :

a) Supposons A inversible et $A \times M = 0$ (matrice nulle)

Alors : $\underbrace{A^{-1} \times A}_{= I} \times M = A^{-1} \times 0 = 0$

Donc : $\underline{M = 0}$

b) Si $A \times M = A \times N$, alors $A^{-1} \times A \times M = A^{-1} \times A \times N$

Donc $\underline{M = N}$