Terminale S (Spécialité)	**Devoir n°2 :** *Divisibilité et congruences*	24/11/14

– Calculatrice autorisée

Exercice 1 : ROC

Pré requis :

Si a et b sont deux entiers relatifs , n un entier naturel :
On admet connu le théorème suivant :
$a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow n \mid a - b$

1) Démontrer soigneusement la transitivité de la relation de congruence

2) a) Montrer que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, pour a et b entiers relatifs
b) En déduire que si $a \equiv b\ [n]$, alors $a^3 \equiv b^3\ [n]$ $(n \in \mathbb{N})$

Exercice 2 :

Les questions 1) , 2) , 3) ,4) et 5) de cet exercice sont indépendantes :

1) a) Montrer que pour tout nombre entier naturel k :
$2^{3k} \equiv 1\ [7]$

b) En déduire le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7.

2) Déterminer le reste dans la division euclidienne par 8 de $7^k + 1$ selon les valeurs de $k \in \mathbb{N}$

3) a) Montrer que $13^4 \equiv 1[10]$
b) En déduire le chiffre des unités de 13^{2014}

4) En étudiant les restes possibles dans la division euclidienne par 5, déterminer pour quels $n \in \mathbb{N}$, $5 \mid n^2 + 3n - 4$

5) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11

Exercice 3 :

On considère la suite dont le terme général est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

1) Vérifier que les six premiers termes de la suite sont tous multiples de 7

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_{n+1} = 2u_n + 7 \times 3^{2n+1}$

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 7 à l'aide d'un raisonnement par récurrence