

38 Avec un graphe probabiliste

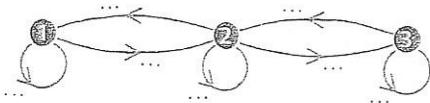
Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : ① « niveau facile », ② « niveau moyen » et ③ « niveau difficile ».

Au premier janvier 2012, l'association a fait son bilan : 20 % des adhérents ont choisi le niveau facile ; 70 % le niveau moyen et le reste, le niveau difficile.

Une enquête a été effectuée et a montré que, d'une année sur l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau ①, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau ② ;
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau ②, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau ① et les autres passent au niveau ③ ;
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau ③, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau ②.

1. Reproduire et compléter le graphe probabilité ci-dessous qui illustre la situation.



2. On choisit au hasard un adhérent de l'association. On note X_n la variable aléatoire égale au niveau choisi par le client à l'année 2012 + n .

a) Déterminer $P(X_0 = 1)$, $P(X_0 = 2)$ et $P(X_0 = 3)$.

b) Pour n nombre entier naturel, on note :

$$P_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3))$$

Justifier que, pour tout n de \mathbb{N} :

$$P(X_{n+1} = 1) = 0,4P(X_n = 1) + 0,2P(X_n = 2)$$

c) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $P_{n+1} = P_n M$ avec une matrice M que l'on précisera.

d) Démontrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} :

$$P_n = P_0 M^n$$

3. a) Quel niveau comptera le plus d'adhérents en 2015 ?

b) Justifier l'existence d'un état stable et le déterminer. Interpréter ce résultat.

D'après Bac

Aide

2. c) Écrire au préalable les relations, analogues à celle du b), donnant $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$.

3. b) L'état stable $P = (x \ y \ z)$ vérifie $P = PM$ avec $x + y + z = 1$.

39 Avec une démonstration par récurrence

Le graphe probabiliste ci-après schématise une marche aléatoire entre deux sommets dans laquelle tous les déplacements sont équiprobables.



1. a) Déterminer la matrice de transition A associée à ce graphe.

b) Calculer A^2 , A^3 , A^4 . Conjecturer une expression de A^n en fonction de n (avec n nombre entier naturel).

c) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

d) En déduire que la suite de matrices (A^n) converge vers une matrice L que l'on précisera.

2. Sans effectuer de calcul supplémentaire, déterminer l'état stable de ce graphe.

Aide

1. b) Utiliser les puissances de $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2})^n$.

2. La réponse se trouve dans la matrice L .

40 Avec une suite récurrente de matrices

Le colza a des aptitudes particulières à disperser ses gènes. Deux espèces différentes A et B de colza sont plantées dans un même champ.

Une étude montre que si a_n et b_n sont les proportions respectives des espèces A et B dans ce champ l'année n où n désigne un nombre entier naturel, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n - 0,2b_n + 0,07 \\ b_{n+1} = -0,4a_n + 0,7b_n + 0,1 \end{cases}$$

On note pour tout nombre entier naturel n , $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner les matrices A et C telles que, pour tout nombre entier naturel n , $U_{n+1} = AU_n + C$.

2. Déterminer l'état stable, c'est-à-dire la matrice S qui vérifie $S = AS + C$, après avoir justifié son existence.

Partie B

Étude de la convergence de la suite (U_n)

1. a) On pose $V_n = U_n - S$. Montrer que pour tout nombre entier naturel n , $V_{n+1} = AV_n$.

b) En déduire que pour tout nombre entier naturel n , $V_n = A^n V_0$, puis que $U_n = A^n (U_0 - S) + S$.

2. En 2012, il y avait une proportion égale à 0,2 pour l'espèce A et à 0,3 pour l'espèce B.

a) Quelle sera la proportion de l'espèce A :

- en 2013 ?
- en 2016 ?

b) Utiliser la calculatrice pour déterminer la proportion de l'espèce A sur le long terme.

Aide

A. 1. A est une matrice carrée et C une matrice colonne.

2. Résoudre cette équation matricielle en S en détaillant les étapes, puis en effectuant les calculs à la calculatrice.

B. 2. Utiliser le 1. b) et la réponse fournie au A. 2.