Terminale S Spécialité Maths	**Devoir de mathématiques :** *Calcul matriciel*	Lundi 25/01/2016

- Calculatrice autorisée

Exercice 1 :

Résoudre le système suivant **matriciellement** en justifiant toutes les étapes :

$$\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 5x + 2y = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soient les matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

En calculant le produit A × B, montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.

Problème *: Interactions sociales entre souris (d'après Bac)*

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B.

La porte entre ces compartiments est ouverte dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte.
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.

Pour tout n , entier naturel non nul, on pose a_n et b_n , les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

1)

a) Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier brièvement que : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 0{,}1 \times b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2 \times a_n + 0{,}9 \times b_n \end{cases}$

c) En déduire que $U_{n+1} = M \times U_n$, où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n \times U_0$

d) Au bout de trois jours, calculer la répartition des souris dans les compartiments A et B

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et montrer que $P^{-1} = \frac{1}{3} P$
   b) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   c) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un :

$$M^n = P\, D^n\, P^{-1}$$

   A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2 \times 0{,}7^n}{3} & \frac{1 - 0{,}7^n}{3} \\ \frac{2 - 2 \times 0{,}7^n}{3} & \frac{2 + 0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$$

3) En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?