Terminale S Spécialité	**Devoir maison :** *Congruences et suites/Matrices*	Pour le 05/01/2015

Exercice 1 : Matrices

On considère la matrice carrée d'ordre 2 suivante $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On souhaite calculer M^{1000} de trois manières différentes :

1) Première méthode :
   a) Calculer M^2, M^3 et M^4 en détaillant les calculs à la main.
   (On rappelle que $M^2 = M\times M$ et de manière générale, $M^n = M\times M^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
   b) Conjecturer l'expression de M^n en fonction de n
   c) Démontrer la conjecture précédente par récurrence
   d) En déduire M^{1000}

2) Deuxième méthode :
   a) Vérifier soigneusement que $M^2 = 2M - I_2$
   b) En déduire les expressions de M^3 puis de M^4 en fonction de M et I_2
   c) En déduire M^{1000}

3) Troisième méthode :
   a) Démontrer que $M = I_2 + A$ où A est une matrice carrée à déterminer
   b) Calculer A^2
   c) En déduire les expressions de M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I_2
   d) Déterminer l'expression de M^{1000} en fonction de A et de I_2

Exercice 2 : Matrices

Soient les deux matrices carrées suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer A+B, puis en déduire $(A+B)^2$ en détaillant les calculs **à la main**
2) Calculer à la calculatrice A^2, B^2 et $2A\times B$
3) A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\times B$? Expliquer.
4) En procédant comme précédemment, a-t-on l'égalité suivante : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$?

Exercice 3 : Congruences et suites

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

1) a) Justifier que le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un entier N en base 10 est le reste de la division euclidienne de N par 100
   b) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de (u_n) ?
2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n\ [4]$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2\ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ [4]$
3) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28\ [100]$
4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.