Correction

Ex 1.

$n \in \mathbb{N}^*$:

$1 \times (n+1) + (-1) \times n = 1$

avec $(1;-1) \in \mathbb{Z}^2$

Th de Bézout : $\text{pgcd}(n+1; n) = 1$ càd **n et n+1 premiers entre eux**

Ex 2 :

$(x;y) \in \mathbb{N}^2$, avec $x < y$ $\quad (S)\begin{cases} x+y = 72 \\ \text{pgcd}(x;y) = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 8x' \\ y = 8y' \end{cases}$ avec $\text{pgcd}(x';y') = 1$.

d'où $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y' = 9 \\ \text{pgcd}(x';y') = 1 \end{cases}$ avec $x' < y'$.

Seuls cas possibles pour $(x';y')$: $(1;8)$, $(2;7)$, $(4;5)$

d'où pour $(x;y)$: $(8;64)$, $(16;56)$, $(32;40)$

Réciproquement : si $(x;y) = (8;64)$ ou $(16;56)$ ou $(32;40)$

alors $\begin{cases} x+y = 72 \\ \text{pgcd}(x;y) = 8 \end{cases}$.

Donc $S = \{(8;64), (16;56), (32;40)\}$

Exercice 3 : $n \in \mathbb{N}$, $a = 2n+3$ $\quad b = 3n+2$.

$d = \text{pgcd}(a;b)$

1) $d \mid 2n+3$ et $d \mid 3n+2$, d'où d divise tte combinaison linéaire à coefficients entiers de $2n+3$ et $3n+2$

En particulier : $d \mid 3 \times (2n+3) - 2 \times (3n+2) = 5$

Or, les seuls diviseurs entiers naturels de 5 sont 1 et 5

Donc $\boxed{d \in \{1 ; 5\}}$

2) Tableau de congruences modulo 5 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$a \equiv$	3	0	2	4	1
$b \equiv$	2	0	3	1	4

$a = 2n+3$

$b = 3n+2$

Si $d = 5$, alors a et b sont multiples de 5

Autrement dit : $a \equiv 0 [5]$ et $b \equiv 0 [5]$.

D'après le tableau, dans ce cas $n \equiv 1 [5]$

$\iff 5 \mid n-1$

$\iff \exists q \in \mathbb{Z}, n-1 = 5q$

$\iff \exists q \in \mathbb{Z}, n = 5q+1$

4) Si $n \neq 5q+1$, $q \in \mathbb{Z}$, alors $d = 1$ (d'après 1)).

c'est-à-dire a et b premiers entre eux

5) $a = 59$ $b = 86$

a) $59 = 2 \times 28 + 3$ et $86 = 3 \times 28 + 2$

d'où $n = 28$ et $28 = 5 \times 5 + 3$.

c'est-à-dire : $n \neq 5q+1$, $q \in \mathbb{Z}$.

D'après 4), a et b sont premiers entre eux.

c'est-à-dire $\text{pgcd}(59 ; 86) = 1$

b) Algorithme d'Euclide :

$86 = 59 \times 1 + 27$

$59 = 27 \times 2 + 5$

$27 = 5 \times 5 + 2$

$5 = 2 \times 2 + 1$ dernier reste non-nul

$2 = 2 \times 1 + 0$

donc : $\text{pgcd}(86 ; 59) = 1$