Correction du QCM d'arithmétique

1) $64 = 2^6$

Diviseurs de 64 : $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$

Il y a 7 diviseurs (Rep : C)

2) $3^{100} + 6 = 3 \times (\underbrace{3^{99} + 2}_{\in \mathbb{N}})$ d'où $3 \mid 3^{100} + 6$ (Rep : A)

$6 \mid 6$ et si $6 \mid 3^{100} + 6$, alors $6 \mid 3^{100}$ ce qui est faux
(on peut montrer que $3^n \equiv 3 [6]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

$3^{100} = (3^2)^{50} = 9^{50}$ d'où $9 \mid 3^{100}$. Si $9 \mid 3^{100} + 6$, alors $9 \mid 6$ ce qui est faux
d'où $9 \nmid 3^{100} + 6$

Si $100 \mid 3^{100} + 6$, alors : $\exists k \in \mathbb{N}, 3^{100} + 6 = 100k$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, 3^{100} = 100k - 6$
$= 2(50k - 3)$
impossible car $2 \nmid 3^{100}$

3) $a \equiv 2 [7]$

a) $a^3 \equiv 2^3 [7]$ (car si $a \equiv b [n]$, $a^p \equiv b^p [n]$, pour tout $p \in \mathbb{N}$)
$\equiv 1 [7] \Leftrightarrow a^3 - 1 \equiv 0 [7]$ c'est-à-dire $7 \mid a^3 - 1$
(Rep A)

La rep C est fausse : contre-exemple :
$9 \equiv 2 [7]$ et $9^3 - 1 = 728$ pair

b) $a^3 \equiv 1 [7]$ (question a) d'où $(a^3)^{333} \equiv 1 [7]$
et $a^{1000} = (a^3)^{333} \times a \equiv a [7]$
$\equiv 2 [7]$

comme $a^{1000} - 1 \not\equiv 0 [7]$ d'où (Rep B)

(Rep C) d'où : $a^{1000} - 1 \equiv 1 [7]$

4) $n \in \mathbb{Z}$ Tableau de congruences modulo 4

$n \equiv$	0	1	2	3
$n^2 \equiv$	0	1	0	1

→ Les seuls restes possibles sont 0 ou 1 → (Rep D)

5) $n \in \mathbb{Z}$: congruences modulo 3

$n \equiv$	0	1	2
$n^2 \equiv$	0	1	1

congruences modulo 4

$n \equiv$	0	1	2	3
$n^2 \equiv$	0	1	0	1

modulo 5 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1

modulo 7 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1

(Rep : A B et C)

6) Algorithme d'Euclide :

$92 = 78 \times 1 + 14$
$78 = 14 \times 5 + 8$
$14 = 8 \times 1 + 6$
$8 = 6 \times 1 + 2$ → dernier reste non-nul : d'où : $PGCD(92;78) = 1$
$6 = 2 \times 3 + 0$

Il faut donc 5 divisions euclidiennes (Rep D)

7) a) $n \in \mathbb{Z}$ $a = 2n+7$ $b = 3n+1$

$3a - 2b = 3 \times (2n+7) - 2 \times (3n+1)$
$= 6n + 21 - 6n - 2$
$= 19$ (Rep C)

De même : $2 \times (3a - 2b) = 2 \times 19 = 38 \iff 6a - 4b = 38$ (Rep D)

b) Soit $d = PGCD(a;b)$ $d \mid a$ et $d \mid b$
d'où d divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de a et de b.
En particulier : $d \mid 3a - 2b = 19 \iff d \mid 19$ (Rep C)

8) $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $9x = 6y$: $x \mid 9x = 6y$ (Rep A)
$9x = 6y \iff 3x = 2y$ d'où $3 \mid 2y$ } d'après le Théorème de Gauss
et $PGCD(3;2) = 1$ } $3 \mid y$ (Rep D)

9) $(-2;1)$ solution particulière de $3x+7y=1 \quad (E)$

Soit $(x;y)$ solution de (E) :

$$\begin{cases} 3x+7y=1 \\ 3\times(-2)+7\times 1 = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3x+7y = 3\times(-2)+7\times 1$

$\Leftrightarrow 3(x+2) = 7(1-y)$

$3 \mid 7(1-y)$ et $PGCD(7;3)=1$ } d'après le théorème de Gauss.

$3 \mid 1-y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 1-y = 3k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = 1-3k$

De même : $7 \mid 3(x+2)$ et $PGCD(7;3)=1$ } d'après le théorème de Gauss :

$7 \mid x+2 \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x+2 = 7k'$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x = 7k'-2$

Réciproquement : ~~$3\times 7k' = 7\times 3k \Leftrightarrow k' = k$~~.

Donc : $\boxed{S = \{(-2+7k;\ 1-3k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$ Rep : B et C

10) $n \in \mathbb{Z}$ tel que $3n \equiv 3\ [5] \Leftrightarrow 5 \mid 3n-3$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 3n-3 = 5k$.

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 3(n-1) = 5k$.

d'où $3 \mid 5k$, or $PGCD(5;3)=1$

d'où, d'après le théorème de Gauss, $3 \mid k$.

c'est-à-dire : $\exists k' \in \mathbb{Z},\ k = 3k'$

d'où : $3(n-1) = 5\times 3k' \Leftrightarrow n-1 = 5k'$

$\Leftrightarrow n-1 \equiv 0\ [5]$ Rep A

$\Leftrightarrow n \equiv 1\ [5]$

11) Pour déterminer si 131 est un nombre premier, il suffit de tester les diviseurs premiers inférieurs ou égaux à 11 car $\sqrt{131} \simeq 11,4$

Rep : C

12) . $51 = 3 \times 17$, donc 51 n'est pas un nombre premier

. $91 = 13 \times 7$, donc 91 n'est pas un nombre premier

. $\sqrt{71} \simeq 8,4$: Nombres premiers inférieurs à 8 : 2, 3, 5, 7

ou, $2 \nmid 71$ | $3 \nmid 71$ | $5 \nmid 71$ et $7 \nmid 71$ → on peut justifier à l'aide des critères de divisibilité

} donc 71 est un nombre premier

Rep : B

. $\sqrt{107} \simeq 10,3$: Nombres premiers inférieurs à 10 : 2, 3, 5, 7

ou : $2 \nmid 107$, $3 \nmid 107$, $5 \nmid 107$ et $7 \nmid 107$

} donc : 107 est un nombre premier

Rép D

13)

1444	2
722	2
361	19
19	19
1	

d'où $1444 = 2^2 \times 19^2$, alors 1444 n'admet que deux diviseurs premiers : 2 et 19.

Rep B

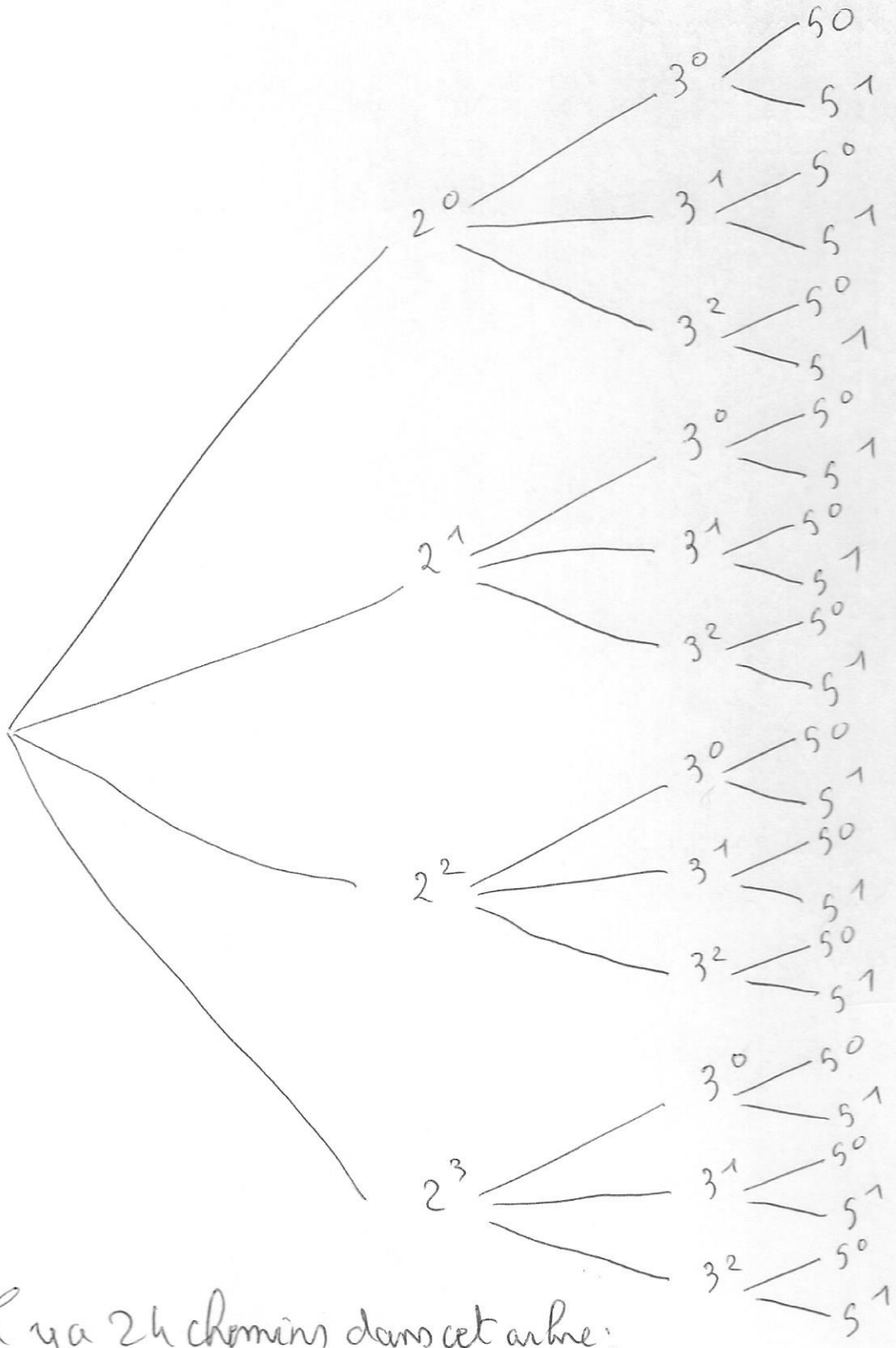
14)

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

d'où $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

A l'aide d'un arbre :

(Voir page suivante)



Il y a 24 chemins dans cet arbre:

$4 \times 3 \times 2 = 24$

360 possède donc 24 diviseurs entiers

Rep : D

15) p et q sont 2 nombres premiers distincts :

- pq+1 n'est pas un nombre premier : ctre-exemple : p=3 et q=5
  p, q : nbres premiers distincts
  mais : pq+1 = 3×5+1 = 16 pas premier.
- p+q n'est pas pair : ctre-exemple : p=2 et q=3 , p+q=5 , impair.

p^q n'est pas toujours un nombre premier.

En effet: si $p=2$, $q=3$

$p^q = 2^3 = 8$: pas premier.

Alors: p et q sont premiers entre eux (Rep: A)

16) 97 est un nombre premier ($\sqrt{97} \simeq 9,8$ et $2 \nmid 97$, $3 \nmid 97$, $5 \nmid 97$, $7 \nmid 97$)

et $97 \nmid 2$

D'après le petit théorème de Fermat:

$$2^{97-1} \equiv 1 \ [97]$$

$$\Leftrightarrow 2^{96} \equiv 1 \ [97]$$

$$\Leftrightarrow 2^{96} - 1 \equiv 0 \ [97]$$

$\Leftrightarrow 2^{96} - 1$ est divisible par 97 (Rep C)

17) n : nombre premier > 2 :

- Le seul nombre premier pair étant 2, n est obligatoirement impair d'où $n \equiv 1 \ [2]$ (Rep A).

- Par la B: $3 > 2$, 3 nombre premier

mais : $3 \equiv 0 \ [3]$ B fausse.

- Par la C: $5 > 2$, 5 nombre premier :

mais: $5 \equiv 0 \ [5]$. C fausse.

- Par la D: $3 > 2$, 3 nombre premier :

mais: $3 \equiv 3 \ [6]$ D fausse.