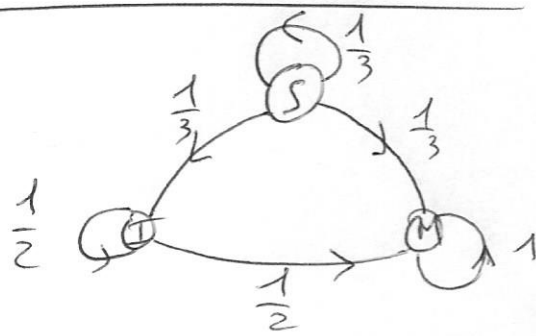


France métropolitaine, sept 2013 :

(1)



$$P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n) \quad P_0 = (0,99 \quad 0 \quad 0,01)$$

on a :

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3} s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} i_n + m_n \end{cases}$$

1) $P_{n+1} = (s_{n+1} \quad i_{n+1} \quad m_{n+1}) = (s_n \quad i_n \quad m_n) \times A$

$$= \left(\frac{1}{3} s_n \quad \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} i_n \quad \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{2} i_n + m_n \right)$$

$$= (s_n \quad i_n \quad m_n) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}$$

d'où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Par récurrence :

- Initialisation : On a $P_1 = P_0 \times A$ (question 1)
 $= P_0 \times A^1$ d'où la propriété est initialisée

- Hérédité : Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

$$P_{n+1} = P_n \times A = \underbrace{(P_0 \times A^n)}_{\text{hypoth. de récurrence}} \times A \stackrel{\text{multiplication matricielle associative}}{=} P_0 \times A^n \times A = P_0 \times A^{n+1}$$

la propriété est héréditaire

Elle est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie

pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{P_n = P_0 \times A^n}$

$$3) P_4 = P_0 \times A^4 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0,01 & 0,1 & 0,89 \end{pmatrix}$$

Au bout de 4 semaines, la probabilité qu'un véhicule soit sain est d'environ 0,01 (c'est-à-dire 1%).

Partie (B):

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q_n = (S_n \ I_n \ M_n) \quad Q_{n+1} = Q_n \times B$$

$$Q_0 = P_4, \quad Q_0 = (0,01 \ 0,1 \ 0,89)$$

$$1) (S_{n+1} \ I_{n+1} \ M_{n+1}) = (S_n \ I_n \ M_n) \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{12} S_n + \frac{5}{12} I_n + \frac{1}{6} M_n & \frac{1}{4} S_n + \frac{1}{4} I_n + \frac{1}{2} M_n & \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} I_n + \frac{1}{3} M_n \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} S_{n+1} = \frac{5}{12} S_n + \frac{5}{12} I_n + \frac{1}{6} M_n \\ I_{n+1} = \frac{1}{4} S_n + \frac{1}{4} I_n + \frac{1}{2} M_n \\ M_{n+1} = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} I_n + \frac{1}{3} M_n \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$2) B^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donc $B^2 = \frac{1}{3} J$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on montre que $B^n = B^2$ (par récurrence)

3) a) On a : $Q_{n+1} = Q_n \times B$

On peut montrer par récurrence que :

$$Q_n = Q_0 \times B^n$$

d'où $Q_n = (0,01 \quad 0,1 \quad 0,89) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) (Q_n) est une suite constante.

On obtient une répartition équitable : autant de chances d'être sain, infecté ou malade.

Donc le vaccin n'éradiquera pas la maladie.