

1) (E): $7x - 5y = 1$

a) $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ d'où $(3; 4)$ solution de (E).

b) $(x; y)$ solution de (E) $\Leftrightarrow 7x - 5y = 1$ (1)

Or, on a aussi $7 \times 3 - 5 \times 4 = 1$ (2)
(d'après a))

(1) - (2): $7(x-3) - 5(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow 7(x-3) = 5(y-4)$

C'est-à-dire $(x; y)$ solution de (E) $\Leftrightarrow 7(x-3) = 5(y-4)$ (*)

c) D'après l'égalité précédente:

$7 \mid 5(y-4)$, or 7 et 5 sont premiers entre eux

D'où, d'après le théorème de Gauss, $7 \mid y-4 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y-4 = 7k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = 7k + 4$

De même: $5 \mid 7(x-3)$ avec 7 et 5 premiers entre eux

D'où, d'après le théorème de Gauss, $5 \mid x-3 \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x-3 = 5k'$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x = 5k' + 3$

Prochamment,

En injectant les valeurs trouvées dans (*), on obtient $k = k'$

Donc: les solutions sont les $(x; y)$ tels que:

$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2) 25 jetons en tout: $\rightarrow x$ rouges

$\rightarrow y$ verts

$\rightarrow$ des jetons blancs

avec $7x - 5y = 1$

D'après 1c), $x = 5k + 3$ et $y = 7k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or, $0 \leq x \leq 25$ et $0 \leq y \leq 25$

$0 \leq 5k + 3 \leq 25$ et $0 \leq 7k + 4 \leq 25$

$\Leftrightarrow -3 \leq 5k \leq 22$ et $-4 \leq 7k \leq 21$

$$(E) \quad -\frac{3}{5} \leq R \leq \frac{22}{5} \quad \text{et} \quad -\frac{4}{1} \leq R \leq 3$$

(2)

Finalement, $R = 0$ ou 1 ou 2 ou 3 (pour respecter les contraintes de l'énoncé).

* Pour $R = 0$:

$$\begin{array}{l} x = 3 \text{ jetons rouges} \\ y = 4 \text{ jetons verts} \end{array} \quad \text{et donc} \quad 25 - (3 + 4) = \underline{18 \text{ jetons blancs}}$$

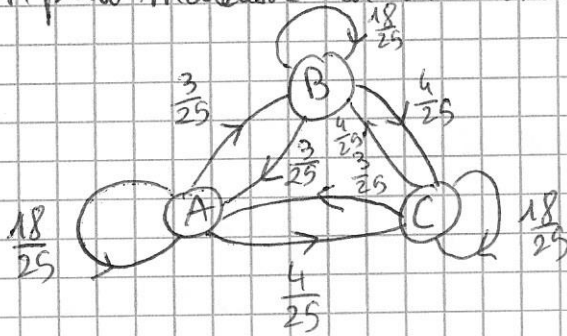
* Pour $R = 1$:

$$\begin{array}{l} x = 5 + 3 = 8 \text{ jetons rouges} \\ y = 7 + 4 = 11 \text{ jetons verts} \end{array} \quad \text{et donc} \quad 25 - 19 = \underline{6 \text{ jetons blancs}}$$

* Pour $R = 2$:

$$\begin{array}{l} x = 13 \text{ jetons rouges} \\ y = 18 \text{ jetons verts} \end{array} \rightarrow \text{impossible car } x + y > 25$$

3) On considère qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts (et donc 18 jetons blancs)
On peut modéliser la situation à l'aide d'un graphe probabiliste à 3 sommets :



$$X_n = (a_n \ b_n \ c_n)$$

T : matrice de transition de la marche aléatoire.

$$T = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = (a_0 \ b_0 \ c_0)$$

Au départ, le pion est en A, d'où $X_0 = (1 \ 0 \ 0)$

T est la matrice de transition de la marche aléatoire

Pour obtenir la matrice ligne des probabilités à l'étape $n+1$, on multiplie la matrice ligne des probabilités à l'étape précédente (c'est-à-dire à l'étape n) par la matrice de transition.

N'ai: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = X_n T$$

Remarque: En partant des données de l'énoncé, on pouvait relier explicitement les coefficients de la matrice X_{n+1} en fonction des autres.

4) a) A la calculatrice:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients sont bien entiers.

B) Par récurrence :

- Initialisation : $T^0 = I$, $D^0 = I$ (I : matrice identité)
d'où $P D^0 P^{-1} = P P^{-1} = I = T^0$

la propriété est initialisée

- Hérédité :

Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$
c'est-à-dire : $T^n = P D^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } T^{n+1} &= T \times T^n = T \times P D^n P^{-1} \\ &= \overbrace{P D P^{-1}} \times P D^n P^{-1} \\ &= P D^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

la propriété est héréditaire

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c'est-à-dire : $T^n = P D^n P^{-1}$

c) Comme $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0,56^n \end{pmatrix}$
pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$$
$$\text{et } \beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = X_0 T^n$

$$\begin{aligned} a) \quad X_n &= (a_n \quad b_n \quad c_n) = (1 \quad 0 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_n \quad \beta_n \quad \gamma_n) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n \\ b_n &= \beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } a_n + b_n + c_n = 1 \Leftrightarrow c_n = 1 - (\alpha_n + \beta_n)$$

4

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n \right)$$

car, $(0,6^n)_n$ suite géométrique de raison q telle que :

$$-1 < q < 1$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{3}{10}$

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,56^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{37}{110}$

car, $c_n = 1 - (a_n + b_n)$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{37}{110} \right)$

$$= \frac{40}{110} = \frac{4}{11}$$

c) car $\frac{4}{11} > \frac{37}{110} > \frac{3}{10}$

Après un grand nombre d'itérations, nous avons plus de chance de nous trouver en C