NOM :.. Prénom :................................

Terminale S Spécialité Maths	**Devoir de mathématiques** *Matrices*	Fait 6 16/02/15

CORRIGÉ

– Calculatrices autorisées

Observations :

NOTE :

Exercice 1 :(Sur le sujet) /7

On souhaite montrer que la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse de deux manières différentes :

A) Première méthode :

1) Calculer det(A) et en déduire que A est inversible

$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\times 0 - 3\times 1 = \underline{-3} \neq 0$
Donc A est inversible

1,5

2) Calculer A^{-1} en détaillant les étapes

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det A = ad - bc \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ D'où $A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}$

2

B) Deuxième méthode :

1) Montrer qu'il existe deux entiers α et β, tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ où I_2 est la matrice identité

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, or, $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

D'où $\underline{2A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = A^2}$ D'où $\begin{cases} \underline{\alpha = 2} \\ \underline{\beta = 3} \end{cases}$

1,5

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

On a : $A^2 = 2A + 3I_2 \iff A^2 - 2A = 3I_2 \iff A(A - 2I_2) = 3I_2$
$\iff A\left[\frac{1}{3}(A - 2I_2)\right] = I_2$

D'où : il existe $B = \frac{1}{3}(A - 2I_2)$ telle que $A \times B = I_2$

Donc A est inversible et $\underline{A^{-1}} = B = \frac{1}{3}(A - 2I_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}$

2

4

Exercice 2 : (Sur le sujet) (Avec prise d'initiatives)

On considère trois plans de l'espace (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations respectives :

(P_1) : $2x - 3y + z - 12 = 0$

(P_2) : $-x + 2y - 4z + 21 = 0$

(P_3) : $5x - 4y + 2z - 21 = 0$

En utilisant la calculatrice, le calcul matriciel et en justifiant chaque étape soigneusement, déterminer, par calcul, l'intersection de ces trois plans.

on est amené à résoudre le système suivant : $(S)\begin{cases} 2x-3y+z=12 \\ -x+2y-4z=-21 \\ 5x-4y+2z=21 \end{cases}$

on pose : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ (Matrice du système)

$(S) \Leftrightarrow AX = B$

1

calculons det A (à la calculatrice) : $\det A = 24 \neq 0$ donc A est inversible

d'où $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Or, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$ 1

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 21 \end{pmatrix}$

1

Donc : $x = -\frac{1}{2} \times 12 - 21 \times \frac{1}{12} + 21 \times \frac{5}{12} = -6 - \frac{7}{4} + \frac{35}{4} = \frac{24}{4} = 1$

$y = -\frac{3}{4} \times 12 - \frac{1}{24} \times (-21) + \frac{7}{24} \times 21 = -9 + \frac{7}{8} + \frac{49}{8} = -\frac{72}{8} + \frac{56}{8} = -\frac{16}{8} = -2$

$z = -\frac{1}{4} \times 12 - \frac{7}{24} \times (-21) + \frac{1}{24} \times 21 = -3 + \frac{49}{8} + \frac{7}{8} = -\frac{24}{8} + \frac{56}{8} = \frac{32}{8} = 4$ 1

Le point M (1 ; -2 ; 4) est le seul point d'intersection des 3 plans (P_1), (P_2) et (P_3)

Exercice 3 : (Sur votre copie) 9

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1 1) a) Exprimer M^2 en fonction de M et de I.

2 b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = u_n M + v_n I$, où u_n et v_n vérifient les relations $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1 2) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a la relation : $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1$

1 b) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = -3u_n + 1$

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n - \frac{1}{4}$

1,5 a) Montrer que la suite (t_n) est géométrique

0,5 b) Exprimer t_n en fonction de n

2 c) En déduire les expressions de u_n, v_n et M^n en fonction de n

0,5 0,5 1

Exercice (37) : $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4-4-1 & -4+6+2 & 2-4 \\ 4-6-2 & -4+9+4 & 2-6 \\ -2+4 & 2-6 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$-2M = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $-2M + 3I = \begin{pmatrix} -4+3 & 4 & -2 \\ -4 & 6+3 & -4 \\ 2 & -4 & 0+3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = M^2$

Donc : $\underline{M^2 = -2M + 3I}$

b) On pose (H_n) : $M^n = u_n M + v_n I$

- Initialisation :

$M^0 = I = 0 \times M + 1 I = u_0 M + v_0 I$ avec $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$

(H_0) est vraie (La récurrence est initialisée).

- Supposons (H_p) vraie pour un certain rang $p \in \mathbb{N}$.

$M^{p+1} = M^p \times M = (u_p M + v_p I) \times M$

$= u_p \times M^2 + v_p \times M$

$= u_p \times (-2M + 3I) + v_p \times M$

$= (-2u_p + v_p) M + 3u_p I$

Posons : $u_{p+1} = -2u_p + v_p$ et $v_{p+1} = 3u_p$

D'où $M^{p+1} = u_{p+1} M + v_{p+1} I$, donc (H_{p+1}) est vraie.

(La propriété est héréditaire)

Par le principe de récurrence, (H_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

avec (u_n) et (v_n) définies par $\boxed{\begin{cases} u_0 = 0,\ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} + v_{n+1} = -2u_n + v_n + 3u_n = u_n + v_n$$

Donc : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$

On pose H_n : $u_n + v_n = 1$. On a (H_0) : $u_0 + v_0 = 0 + 1 = 1$ (H_0 vraie)

Soit : On suppose (H_n) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1$, ($H_{n+1}$) vraie

Par conséquent, par le principe de récurrence :

$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $u_{n+1} = -2u_n + v_n$, or $v_n = 1 - u_n$

D'où $u_{n+1} = -2u_n + 1 - u_n = -3u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_n - \frac{1}{4}$

a) $t_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}$

$= -3u_n + 1 - \frac{1}{4} = -3u_n + \frac{3}{4} = -3\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$

$= -3\, t_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (t_n) est une suite géométrique, de raison -3 et de premier terme

$t_0 = u_0 - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

b) Comme (t_n) géométrique :

$t_n = t_0 \times q^n = -\frac{1}{4} \times (-3)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $u_n = t_n + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_n = -u_n + 1 = \frac{1}{4}(-3)^n - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a prouvé que : $M^n = u_n M + v_n I$ (question 1) b))

D'où $M^n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n\right) M + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n\right) I$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-3)^n\right)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$