

Exercice ①: ①/6

$$\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 5x + 2y = \frac{1}{12} \end{cases}$$

on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

On a: $AX = B$

$$\det A = 4 \times 2 - 5 \times (-3)$$

$$= 8 + 15 = 23 \neq 0 \text{ d'où } A \text{ est inversible}$$

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\text{N'ou } A^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

on a $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{23} (2 \times (-3) + 3 \times \frac{1}{12}) = \frac{1}{23} (-6 + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{23} (-5 \times (-3) + 4 \times \frac{1}{12}) = \frac{1}{23} (15 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $S = \left\{ \left(-\frac{1}{4}; \frac{2}{3} \right) \right\}$

Exercice ②: ①/4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 1 \times (-6) + 0 \times 5 \\ -1 \times 3 + 2 \times (-6) + 3 \times 5 \\ 0 \times 3 + 5 \times (-6) + 6 \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Supposons A inversible :

Alors $A^{-1} \times A \times B = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $B = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ c'est contradictoire

Donc A n'est pas inversible

Problème: 10

(2)

1) a) Au but d'une année:

- 20% des saurs présentes dans A passent dans B
- 10% des saurs présentes dans B passent dans A

$$\text{d'où } a_1 = \underbrace{\frac{80}{100} a_0}_{\substack{\text{il reste 80\% des saurs} \\ \text{déjà dans A}}} + \underbrace{\frac{10}{100} \times b_0}_{\substack{\text{la part de} \\ \text{celles qui viennent} \\ \text{de B}}} = 0,45$$

$$\text{et } b_1 = \underbrace{\frac{90}{100} \times b_0}_{\substack{\text{il reste 90\%} \\ \text{des saurs déjà} \\ \text{dans B}}} + \underbrace{\frac{20}{100} \times a_0}_{\substack{\text{la part de} \\ \text{celles qui} \\ \text{viennent de A}}} = 0,55$$

$$\text{Donc } U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

b) $n \in \mathbb{N}$: On raisonne de même en passant de n jours à $n+1$ jours.

$$\text{d'où } a_{n+1} = \underbrace{\frac{80}{100} \times a_n}_{\substack{\text{il reste 80\%} \\ \text{des saurs en A} \\ \text{au bout de } n \text{ jours}}} + \underbrace{\frac{10}{100} \times b_n}_{\substack{\text{la part de} \\ \text{celles qui} \\ \text{viennent} \\ \text{de B}}} = 0,8a_n + 0,1b_n$$

$$b_{n+1} = \underbrace{\frac{90}{100} \times b_n}_{\substack{\text{il reste 90\% des} \\ \text{saurs en B au} \\ \text{bout de } n \text{ jours}}} + \underbrace{\frac{20}{100} \times a_n}_{\substack{\text{la part de} \\ \text{celles qui} \\ \text{viennent de A}}} = 0,9b_n + 0,2a_n = 0,2a_n + 0,9b_n$$

$$\text{Donc: } \begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,1b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,9b_n \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) $U_{n+1} = M \times U_n$ où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$

d) Au bout de 3 jours, $U_3 = M^3 \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}^3 \times \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0,3905 \\ 0,6095 \end{pmatrix}$ (A la calculatrice).

- Proportion dans le compartment A: 39,05%
- Proportion dans le compartment B: 60,95%

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$

d'où $P \times \left(\frac{1}{3}P\right) = I_2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$

b) $P^{-1}MP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0,7 \\ 2 & -0,7 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} = D$ (Matrice diagonale)

c) On démontre ce résultat par récurrence:

- Initialisation: D'après 2 b), $P^{-1}MP = D$

d'où $P \times P^{-1}MP = PD$

$MP = PD$

$MP \times P^{-1} = PD \times P^{-1}$

$M = PD P^{-1}$ (la propriété est initialisée).

- Hérédité: On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

$M^{n+1} = M \times M^n = M \times P D^n P^{-1} = P D P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1}$
 $= P D \times D^n \times P^{-1}$

$= P \times D^{n+1} \times P^{-1}$ (la propriété est héréditaire)

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c'est-à-dire: $M^n = P D^n P^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) D'après 1 c): $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1-0,7^n}{3} \\ \frac{2-2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D'où: $a_n = \frac{1+2 \times 0,7^n}{6} + \frac{1-0,7^n}{6} = \frac{2+0,7^n}{6}$ comme $-1 < 0,7 < 1$, alors
 $b_n = \frac{2-2 \times 0,7^n}{6} + \frac{2+0,7^n}{6} = \frac{4-0,7^n}{6}$
 d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ (proportion à long terme dans A)
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2}{3}$ (proportion à long terme dans B)