Terminale S
Spécialité Maths

Correction du DS n°2

Fait le 16/11/15

(1)

Exercice 1 : a, b, deux entiers relatifs, $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ Supposons que $a \equiv b\ [n]$:

- Il existe un unique couple $(q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $a = nq + r$ avec $0 \leq r < n$
- Il existe un unique couple $(q';r') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $b = nq' + r'$ avec $0 \leq r' < n$

Comme $a \equiv b\ [n]$, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

d'où $r = r'$

Alors : $a - b = nq + r - (nq' + r)$

$= n(q - q')$ avec $q - q' \in \mathbb{Z}$

Donc : $n \mid a - b$

$\Leftarrow$ Supposons que $n \mid a - b$:

Effectuons la division euclidienne de a par n :

il existe un unique couple $(q;r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tel que :

$a = nq + r$ avec $0 \leq r < n$

Effectuons la division euclidienne de b par n :

Il existe un unique couple $(q';r') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, tel que :

$b = nq' + r'$ avec $0 \leq r' < n$.

D'où $a - b = nq + r - (nq' + r')$

$= n(q - q') + r - r'$

Or, $n \mid a - b$

De manière évidente, $n \mid n(q - q')$.

D'où $n \mid r - r'$. Or, $\begin{cases} 0 \leq r < n \\ -n < -r' \leq 0 \end{cases}$ d'où $-n < r - r' < n$

Le seul multiple de n strictement compris entre $-n$ et n est 0

Donc $r - r' = 0 \iff r = r'$

c'est-à-dire a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

Par conséquent : $a \equiv b\ [n]$

Exercice ② :

1) a) $3^4 = 81$ et $10 | 81 - 1$

donc d'après l'exercice ① : $3^4 \equiv 1\ [10]$

Remarque :

Un nombre entier naturel est toujours congru à son chiffre des unités modulo 10

b) $3^{2015} = 3^{4\times 503 + 3} = (3^4)^{503} \times 3^3$

or, $3^4 \equiv 1\ [10]$ d'où $(3^4)^{503} \equiv 1\ [10]$

(car si $x \equiv y\ [n]$, alors $x^\alpha \equiv y^\alpha\ [n]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$)

Donc : $3^{2015} \equiv 27\ [10]$

$\equiv 7\ [10]$

Donc le chiffre des unités de 3^{2015} est 7

2) $(E) : 6x^2 - 3y^2 = 1$.

a) modulo 6

$y \equiv$	0	1	2	3	4	5
$y^2 \equiv$	0	1	4	3	4	1
$-3y^2 \equiv$	0	3	0	3	0	3

b) or, $6x^2 \equiv 0\ [6]$

d'où $6x^2 - 3y^2 \equiv \begin{cases} 0\ [6] \\ \text{ou} \\ 3\ [6] \end{cases}$

on a $6x^2 - 3y^2 \not\equiv 1\ [6]$

Donc (E) n'a pas de solutions en nombres entiers naturels

3) Tableau de congruences modulo 7 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1
$-5n \equiv$	0	2	4	6	1	3	5
$n^2-5n+6 \equiv$	6	2	0	0	2	6	5

n^2-5n+6 divisible par $7 \iff n^2-5n+6 \equiv 0 [7]$

$\iff n \equiv 2[7]$

ou $n \equiv 3[7]$

$\iff n = 7k+2$ ou $7k+3$, $k \in \mathbb{N}$

Donc : $S = \{ 7k+2 ; 7k+3 , \text{ pour } k \in \mathbb{N} \}$

Exercice (3) :

1) a) $9(E_n + 2^n) - 2 \times 2^n = 9(3^{2n} + 2^n + 2^n) - 2 \times 2^n$

$= 3^2 \times 3^{2n} - 2^{n+1}$

$= 3^{2n+2} - 2^{n+1}$

$= 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = E_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) - Initialisation : $E_0 = 3^0 - 2^0$

$= 0$ et $7 \mid 0$ donc la propriété est initialisée

- Hérédité :

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : E_n est divisible par 7

donc : $\exists k \in \mathbb{N}$, $E_n = 7k$.

D'après la formule prouvée en a) :

$E_{n+1} = 9(7k + 2^n) - 2 \times 2^n$

$= 9 \times 7k + 9 \times 2^n - 2 \times 2^n$

$= 9 \times 7k + 2^n \underbrace{(9-2)}_{=7}$

donc $7 \mid E_{n+1}$ donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est divisible par 7

2) a) $E_n = 3^{2n} - 2^n$

$3^2 = 9 \equiv 2 \ [7]$

d'où $3^{2n} \equiv 2^n \ [7]$ (car si $x \equiv y \ [n]$, alors $x^p \equiv y^p \ [n]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$)

d'où $3^{2n} - 2^n \equiv 2^n - 2^n \ [7]$ (car si $x \equiv y \ [n]$ et $z \equiv t \ [n]$ alors $x+z \equiv y+t \ [n]$)

$\equiv 0 \ [7]$

Donc $E_n \equiv 0 \ [7]$

b) $E_n \equiv 0 \ [7] \Leftrightarrow 7 \mid E_n$.

3) Par factorisation :

a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $n \in \mathbb{N}$:

$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}$

$- (ba^{n-1} + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n)$

$= a^n - b^n$ (tous les termes se simplifient sauf le premier et le dernier).

b) On pose $a = 3^2$ et $b = 2$

Alors $E_n = a^n - b^n$

$= (3^2 - 2)(\underbrace{9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + \dots + 9 \times 2^{n-2} + 2^{n-1}}_{= k})$ (question a)

$= 7 \times k$, avec $k \in \mathbb{N}$

Donc : $7 \mid E_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$