CORRIGÉ

Terminale S (Spé Maths)	**Contrôle d'arithmétique** Feuil 6 *Résolution d'équations diophantiennes*	Lundi 21 mars 2016

Calculatrices autorisées

Résoudre les équations diophantiennes suivantes dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$(E_1) : 5x + 7y = 1$

D'après le théorème de Bezout, (E_1) admet des solutions $\Leftrightarrow PGCD(7;5) = 1$

Or, 7 et 5 sont bien premiers entre eux, d'où $PGCD(7;5) = 1$

(E_1) admet donc des solutions.

$(3;-2)$ est une solution évidente de (E_1).

En effet : $5\times 3 + 7\times(-2) = 15 - 14 = 1$

Soit $(x;y)$ solution de (E_1) :

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1 \\ 5\times 3 + 7\times(-2) = 1 \end{cases}$$

d'où :

$5(x-3) + 7(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 5(x-3) = 7(-y-2)$

$\left.\begin{array}{l} 5 \mid 7(-y-2) \\ \text{or } PGCD(7;5) = 1 \end{array}\right\}$ Théorème de Gauss $\Rightarrow 5 \mid -y-2$

d'où : $\exists k \in \mathbb{Z},\ -y-2 = 5k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = -2-5k$

De même :

$\left.\begin{array}{l} 7 \mid 5(x-3) \\ PGCD(7;5) = 1 \end{array}\right\}$ Théorème de Gauss d'où $7 \mid x-3$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x-3 = 7k'$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x = 7k'+3$

Réciproque : $\cancel{5\times 7}k' = \cancel{7\times 5}k$ d'où $k = k'$

Donc : $\boxed{S = \{(7k+3\,;\,-5k-2),\ k \in \mathbb{Z}\}}$

$(E_2) : 35x - 14y = 63$

On a $PGCD(35;14) = PGCD(7\times 5\,;\,7\times 2) = 7\times \underbrace{PGCD(5;2)}_{=1} = 7$

et $7 \mid 63$ $(63 = 7\times 9)$

D'où (E_2) admet des solutions.

On a (E_2) : $\cancel{7}\times 5x - \cancel{7}\times 2y = \cancel{7}\times 9$

$\Leftrightarrow 5x - 2y = 9$

$(3;3)$ solution particulière de (E_2)

Soit $(x;y)$ solution particulière de (E_2)

On a : $\begin{cases} 5\times x - 2\times y = 9 \\ 5\times 3 - 2\times 3 = 9 \end{cases}$

d'où $5(x-3) - 2(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow 5(x-3) = 2(y-3)$

$\left.\begin{array}{l} 5 \mid 2(y-3) \\ PGCD(5;2) = 1 \end{array}\right\}$ Théorème de Gauss d'où $5 \mid y-3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y-3 = 5k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ y = 5k+3$

de même : $\left.\begin{array}{l} 2 \mid 5(x-3) \\ PGCD(5;2) = 1 \end{array}\right\}$ Théorème de Gauss d'où $2 \mid x-3$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x-3 = 2k'$

$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z},\ x = 2k'+3$

Réciproque : $\cancel{5\times 2}k' = \cancel{2\times 5}k$ d'où $k = k'$

Donc : $\boxed{S = \{(2k+3\,;\,5k+3),\ k \in \mathbb{Z}\}}$