

$$N = 1 + 2 + \dots + m$$

Partie (A):

1) $36 = 6^2$ (= c'est bien le carré d'un entier)

$$36 = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow n(n+1) = 72$$

$$n = 8, n+1 = 9, n(n+1) = 72.$$

D'où $36 = 1 + 2 + \dots + 8$

36 est bien triangulaire

2) a) $1 + 2 + \dots + m = \frac{n(n+1)}{2} = N$

N est un carré $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, N = p^2$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = p^2$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) = 2p^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{n^2 + n - 2p^2 = 0}$$

b) D'après a), $1 + 2 + \dots + m$ est le carré d'un entier

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, n^2 + n - 2p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, 4n^2 + 4n - 8p^2 = 0 \quad (\text{en multipliant les 2 membres de l'égalité précédente par 4}).$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, (2n+1)^2 - 1 - 8p^2 = 0 \quad (\text{car } (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\exists p \in \mathbb{N}, (2n+1)^2 - 8p^2 = 1}$$

Partie (B): (E): $x^2 - 8y^2 = 1, (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

1) $(1; 0)$ est solution de (E) - En effet: $1^2 - 8 \times 0^2 = 1$

$(3; 1)$ est solution de (E) - En effet: $3^2 - 8 \times 1^2 = 9 - 8 = 1$

2) Soit $(x; y)$ solution de (E) $\Leftrightarrow x^2 - 8y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow x \times x + y \times (-8y) = 1$$

C'est-à-dire: $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, u = x \text{ et } v = -8y$ tels que:

$xu + yv = 1$ - D'après le lemme de Bézout,
 x et y sont premiers entre eux

(2)

Partie (c)

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

2) $\det A = 9 - 8 = 1 \neq 0$ donc A^{-1} existe

et: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

On a: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x' - 8y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x' - 8y' \\ y = -x' + 3y' \end{cases}$

3) (x, y) solution de (E) $\Leftrightarrow x^2 - 8y^2 = 1$

$\Leftrightarrow (3x' - 8y')^2 - 8(-x' + 3y')^2 = 1$

$\Leftrightarrow 9x'^2 + 64y'^2 - 48x'y' - 8(y'^2 + x'^2 - 6x'y') = 1$

$\Leftrightarrow x'^2 - 8y'^2 - \cancel{48x'y'} + \cancel{48x'y'} = 1$

$\Leftrightarrow x'^2 - 8y'^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x', y')$ solution de (E)

4) $x_0 = 3, y_0 = 1$

Par récurrence:

- Initialisation:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_1 = 17 \\ y_1 = 6 \end{cases}$$

$(x_0; y_0)$ solution de (E) - en effet:

$$x_0^2 - 8y_0^2 = 3^2 - 8 \times 1^2 = 1$$

(3)

$$\text{et } x_1^2 - 8y_1^2 = 17^2 - 8 \times 6^2$$

$$= 289 - 288 = 1, \text{ donc } (x_1; y_1) \text{ solution}$$

de (E)
La propriété est initialisée

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire $(x_n; y_n)$ solution de (E).

on a: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ or, d'après la question 3),
 $(x_{n+1}; y_{n+1})$ solution de (E)

La propriété est donc héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n; y_n)$ solution de (E).

Partie (D):

On a montré dans la question précédente que $(17; 6)$ est une solution de (E). Or, d'après la partie (A), on a une relation

du type: $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$ avec n et p entiers naturels
(pour que N soit un carré).

$$2n+1 = 17 \Leftrightarrow n = 8$$

$$\text{et } 1+2+\dots+8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36 < 2015$$

Dans la partie (C), on a montré que si $(x; y)$ solution de (E)

alors $(x'; y')$ défini par ~~$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$~~

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est aussi}$$

solution de (E)

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

calculons $A \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$

on a: $2n+1 = 99$

$\Leftrightarrow n = 49$

or, $\frac{49 \times 50}{2} = 1225 < 2015$

Calculons $A \times \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 577 \\ 204 \end{pmatrix}$

(4)

$$2n+1=577 \Leftrightarrow n = \frac{576}{2} = 288$$

avec $\frac{288 \times 289}{2} = 41616 > 2019$

$$\text{et } 41616 = 204^2$$

Donc 41616 est un nombre triangulaire supérieur à 2019
et qui est un carré.