

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

1) $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{1}{2}$

$v_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{2}{3}$

a) $N=2$:

n	u_n	v_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{18}$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{3} = \frac{\frac{11}{6}}{3} = \frac{11}{18}$$

b) le affiché correspond à u_n et v à v_n .

3) $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ or $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X_{n+1} = A X_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Initialisation: $X_0 = A^0 X_0$ car $A^0 = I$

d'où la propriété est initialisée.

- Hérédité:

Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$
 c'est-à-dire: $X_n = A^n X_0$

or, $X_{n+1} = A X_n$ (question 3a))

d'où $X_{n+1} = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$. propriété est héréditaire

Par le principe de récurrence, $X_n = A^n X_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4)

a) $P \times P' = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} + \frac{3}{5} & +\frac{6}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

D'où P est inversible et $P^{-1} = P'$.

On admet que: $A = P'BP$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

- Initialisation: $A^0 = I = P'B^0P$ d'où la propriété est initialisée.

- Hérédité: Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang n .

C'est-à-dire $A^n = P'B^nP$

$$A^{n+1} = A \times A^n = P'BP \times P'B^nP$$

$$= P'B \underbrace{P \times P'}_{=I} B^n P$$

$$= P'B^{n+1}P, \text{ d'où la propriété est héréditaire.}$$

Par le principe de récurrence,

Par tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P'B^nP$.

b) On admet que par tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$

On a: $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\frac{1}{6})^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \times (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Donc $A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}(\frac{1}{6})^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}(\frac{1}{6})^n \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}(\frac{1}{6})^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times (\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}, \text{ par tout } n \in \mathbb{N}$

5a) On a: $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}(\frac{1}{6})^n & \frac{3}{5} - \frac{3}{5}(\frac{1}{6})^n \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5}(\frac{1}{6})^n & \frac{3}{5} + \frac{2}{5}(\frac{1}{6})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}(\frac{1}{6})^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}(\frac{1}{6})^n \end{pmatrix}$$

car, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{cases} u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

② $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ suite géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$
d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

Donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$