

Exercice 92 p103.

1) (E): $109x - 226y = 1 \quad (x, y) \in \mathbb{N}^2$

a) Algorithme d'Euclide:

$$226 = 109 \times 2 + 8$$

$$109 = 8 \times 13 + 5$$

$$8 = 5 \times 1 + 3$$

$$5 = 3 \times 1 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non-nul est 1
d'où $\text{PGCD}(226, 109) = 1$

D'après le théorème de Bézout: (E) admet des solutions entières

b) Tout d'abord: $109 \times 141 - 226 \times 68 = 1$

d'où $(141, 68)$ est une solution particulière de (E)

Soit (x, y) une solution de (E), alors:

$$\begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109 \times 141 - 226 \times 68 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 109x - 226y = 109 \times 141 - 226 \times 68 \\ 109(x - 141) - 226(y - 68) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 109(x - 141) = 226(y - 68)$$

on a $109 \mid 226(y - 68)$

et $\text{PGCD}(226, 109) = 1$
(question a))

Théorème de Gauss

d'où $109 \mid y - 68$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y - 68 = 109k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = 109k + 68$$

De même, on montre que: $226 \mid x - 141$

$$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x - 141 = 226k'$$

$$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x = 226k' + 141$$

Réciproquement: $109 \times 226k' = 226 \times 109k \Leftrightarrow k' = k$

Donc les solutions de (E) sont données par:

$$S = \{(226k + 141, 109k + 68), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$c) \quad x = 141 + 226k \quad y = 68 + 109k \quad (2)$$

$$d = 141 + 226k : \text{il faut } 0 \leq d \leq 226$$

$$\Rightarrow 0 \leq 141 + 226k \leq 226$$

$$\Rightarrow -141 \leq 226k \leq 85 \quad \left. \begin{array}{l} \text{seule possible} \\ k=0 \end{array} \right\}$$

$$226k \leq 85 \Rightarrow k \leq 0,38$$

d'où k seul couple d'entiers naturels solution de (c):

$$\boxed{(141; 68)}$$

$$2) \quad \sqrt{227} \approx 15,07$$

Les seuls nombres premiers inférieurs à $\sqrt{227}$ sont: 2, 3, 5, 7, 11, 13
et aucun de divise 227

Donc 227 est premier.

$$3) \quad A = \{a \in \mathbb{M}, a \leq 226\}, \quad \text{card } A = 227$$

$$f: A \rightarrow A$$

$$a \mapsto \text{reste dans la division euclidienne de } a^{109} \text{ par } 227$$

$$g: A \rightarrow A$$

$$a \mapsto \text{reste dans la division euclidienne de } a^{141} \text{ par } 227.$$

$$a) \quad f(0) = \text{reste dans la division euclidienne de } 0 \text{ par } 227 \\ = 0$$

$$\text{d'où } g[f(0)] = g(0) = \text{reste dans la division euclidienne de } 0 \text{ par } 227 \\ = 0$$

$$\text{Donc } \underline{g[f(0)] = 0}$$

$$b) \quad a \in A^*:$$

$$\text{Par définition, } 227 \nmid a \quad \text{car } 0 < a \leq 226$$

$$\text{d'après le petit théorème de Fermat: } a^{227-1} \equiv 1 [227]$$

c'est-à-dire: $a^{226} \equiv 1 [227]$

c) Soit $a \in A^*$,

$$g\{f(a)\} \equiv \{f(a)\}^{141} [227] \equiv (a^{109})^{141} [227]$$

Or, d'après 1) b) $109 \times 141 = 226 \times 68 + 1$

$$\text{d'où } a^{109 \times 141} = a^{226 \times 68} \times a = (a^{226})^{68} \times a$$

Or, d'après 3) b), $a^{226} \equiv 1 [227]$

$$\text{d'où } a^{109 \times 141} \equiv a [227]$$

$$\text{d'où } g\{f(a)\} \equiv a [227] \quad \text{or, } g\{f(a)\} \text{ et } a \text{ sont}$$

donc: $g\{f(a)\} = a$, pour tout $a \in A^*$ dans A^*

$$f\{g(a)\} \equiv g(a)^{109} [227] \equiv a^{141 \times 109} [227]$$

$$\equiv a [227]$$

donc: $f\{g(a)\} = a$, pour tout $a \in A^*$

Problème n° 71 (Exercice unal):

Partie (A):

1) a) a_0 : nombre d'individus en milieux qui habitent la ville en 2010
 b_0 : nombre d'individus en milieux qui habitent la campagne en 2010

Nous: $a_0 = 8000$ et $b_0 = 2000$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \frac{20}{100} \times b_0 - \frac{10}{100} \times a_0 = \frac{90}{100} a_0 + \frac{20}{100} b_0 \\ &= 0,9 a_0 + 0,2 b_0 \\ &= 0,9 \times 8000 + 0,2 \times 2000 \\ &= 7600 \text{ individus en ville en 2011} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 + \frac{10}{100} \times a_0 - \frac{20}{100} \times b_0 = 0,1 a_0 + 0,8 b_0 \\ &= 0,1 \times 8000 + 0,8 \times 2000 = 2400 \\ &\quad \text{individus en campagne en 2011} \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Entre l'année $2010+n$ et $2010+n+1$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,9a_n + 0,2b_n \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,8b_n \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

d'où $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$

c) - Initialisation : $A^1 \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0,9 \times 8000 + 0,2 \times 2000 \\ 0,1 \times 8000 + 0,8 \times 2000 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7600 \\ 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (\text{d'après 1/a})$$

D'où la propriété est initialisée.

- Hérédité : Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} \underset{(\text{question 1/b})}{=} A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \underset{(\text{hypothèse de récurrence})}{=} A \times A^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

$$= A^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

La propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}}$

2) $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de P^{-1} : Tout d'abord : $\det P = -1 - 2 = -3 \neq 0$

d'où P est inversible.

On a: $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(5)

$$P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{0,9}{3} + \frac{0,2}{3} & -\frac{0,2}{3} + \frac{2 \times 0,8}{3} \\ \frac{0,9}{3} + \frac{0,1}{3} & \frac{0,2}{3} + \frac{0,8}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{0,7}{3} & \frac{1,4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0,7}{3} + \frac{1,4}{3} & -\frac{1,4}{3} + \frac{1,4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{cases} \lambda_1 = 0,7 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

b) $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$
 $\Leftrightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$

* Initialisation: $PDP^{-1} = A$ (d'où la propriété est initialisée).

* Hérédité: On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^{n+1} = A^n \times A = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} \times PDP^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \times \underbrace{D}_{\text{I}} \times P^{-1}$$

$$= P \times \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \times P^{-1} \quad (6)$$

$$= P \times \begin{pmatrix} d_1^{n+1} & 0 \\ 0 & d_2^{n+1} \end{pmatrix} \times P^{-1} \quad (\text{d'où la propriété est héréditaire}).$$

Par le principe de récurrence,

Par tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie.

c'est-à-dire: Par tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = P \times \begin{pmatrix} 0,7^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

$$c) A^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,7^n & 2 \\ 0,7^n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0,7^n}{3} + \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}(0,7^n + \frac{2}{3}) \\ -\frac{0,7^n}{3} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \times 0,7^n + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Partie B:

a) D'après 1c):

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0,7^n}{3} + \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \times 0,7^n + \frac{2}{3} \\ -\frac{0,7^n}{3} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \times 0,7^n + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où: } a_n = 8000 \times \left[\frac{0,7^n}{3} + \frac{2}{3} \right] + 2000 \times \left[-\frac{2}{3} \times 0,7^n + \frac{2}{3} \right]$$

$$= \frac{0,7^n}{3} (8000 - 4000) + \frac{20000}{3} = \frac{4000}{3} \times 0,7^n + \frac{20000}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{et } b_n = 8000 \times \left[-\frac{0,7^n}{3} + \frac{1}{3} \right] + 2000 \times \left[\frac{2}{3} \times 0,7^n + \frac{1}{3} \right], \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$b) \text{ En } 2015 : n = 5 = \frac{0,7^n}{3} \{-4000\} + \frac{10000}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } a_5 = 8000 \times \left[\frac{0,7^5}{3} + \frac{2}{3} \right] + 2000 \times \left[-\frac{2}{3} \times 0,7^5 + \frac{2}{3} \right]$$

$$\approx 6891 \text{ habitants en ville}$$

* En 2020 : $n = 10$

$$\text{d'où } a_{10} = 8000 \times \left[\frac{0,7^{10}}{3} + \frac{2}{3} \right] + 2000 \times \left[-\frac{2}{3} \times 0,7^{10} + \frac{2}{3} \right]$$

$$\approx 6704 \text{ habitants en ville}$$