

Exercice 1:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^{*+} \quad \text{et} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Première méthode:

$$\begin{array}{l} a) \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \\ \quad \quad \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \quad \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M^4 = M \times M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix} \\ \quad \quad \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4a & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Conjecture: Il semblerait que: $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$

c) On pose (P): " $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$ "

- Initialisation: $M^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 \times a & 1 \end{pmatrix}$

La propriété est donc initialisée.

- Hérité: On suppose la propriété (P) jusqu'à un certain rang $p \in \mathbb{N}$.

On a: $M^{p+1} = M \times M^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pa & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (p+1)a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{La propriété est héritée.}$$

- Par le principe de récurrence, (P) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

d) $M^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix}$ en appliquant la formule précédente pour $n = 1000$

2) Deuxième méthode:

a) $2M - I_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2a & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} = M^2$$

(2)

Donc: $M^2 = 2M - I_2$

$$\begin{aligned} b) M^3 &= M \times M^2 = M \times (2M - I_2) \\ &= 2M^2 - M \\ &= 2 \times (2M - I_2) - M \\ &= 4M - 2I_2 - M \\ M^3 &= 3M - 2I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^4 &= M \times M^3 = M \times (3M - 2I_2) \\ &= 3M^2 - 2M \\ &= 3(2M - I_2) - 2M \\ &= 6M - 3I_2 - 2M \end{aligned}$$

Donc $M^4 = 4M - 3I_2$

c) Conjecture: Il semblerait que $M^n = nM - (n-1)I_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On va montrer ce résultat par récurrence.

- On pose (H): $M^n = nM - (n-1)I_2$.

- Initialisation: $M^1 = 1 \times M - \underbrace{(1-1)}_0 I_2$
(H) est initialisée.

- Hérédité: On suppose (H) vraie pour un certain rang $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} M^{p+1} &= M \times M^p = M \times (pM - (p-1)I_2) \\ &= pM^2 - (p-1)M \end{aligned}$$

Or, $M^2 = 2M - I_2$

Donc $M^{p+1} = p(2M - I_2) - (p-1)M$

$$= 2pM - pI_2 - pM + M$$

$$= (p+1)M - pI_2 \quad \text{— Donc (H) est héréditaire}$$

Par conséquent, par le principe de récurrence, (H) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C'est-à-dire: $M^n = nM - (n-1)I_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Il suffit de connaître $n = 1000$

(3)

$$\begin{aligned} \text{D'où } M^{1000} &= 1000 M - 999 I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 1000a & 1000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 999 & 0 \\ 0 & 999 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Troisième méthode:

$$\begin{aligned} a) M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_2 + A \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Matrice nulle.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) M^2 &= (I_2 + A)^2 = (I_2 + A) \times (I_2 + A) \\ &= I_2 + A + A + A^2 \\ &= I_2 + 2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^3 &= M \times M^2 = M \times (I_2 + 2A) \\ &= (I_2 + A) \times (I_2 + 2A) \\ &= I_2 + 2A + A + 2A^2 \\ &= I_2 + 3A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^4 &= M \times M^3 = (I_2 + A) \times (I_2 + 3A) \\ &= I_2 + 3A + A + 3A^2 \\ &= I_2 + 4A \end{aligned}$$

d) On démontre par récurrence que $M^n = I_2 + nA$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } M^{1000} &= I_2 + 1000A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1000a & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice (2):

4

$$1) A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) \\ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ -9 & 10 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2) A la calculatrice:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } 2A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3) A^2 + B^2 + 2A \times B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -8 & 10 & -4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \neq (A+B)^2$$

on a: $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$ car le produit n'est pas commutatif
 $AB \neq BA$

$$4) A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -5 & -4 & -6 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$$

Cela prouve encore de la non-commutativité du produit.

Exercice (3):

$$u_0 = 14$$

$$u_{n+1} = 5u_n - 6$$

, pour $n \in \mathbb{N}$

1) a) $N = \sum_{k=0}^n a_k \times 10^k$ avec $0 \leq a_k \leq 9$ (5)
 par tout $k \in \{0; \dots; n\}$

$$= 10 \left(\sum_{k=1}^n a_k \times 10^{k-1} \right) + a_0$$

$$= 10^2 \left(\sum_{k=2}^n a_k \times 10^{k-2} \right) + 10a_1 + a_0$$

avec $\sum_{k=2}^n a_k \times 10^{k-2} \in \mathbb{Z}$

Donc: $N \equiv 10a_1 + a_0 \pmod{100}$

$10a_1 + a_0$ est le nombre constitué des deux derniers chiffres de N
 c'est donc bien le reste dans la division euclidienne de N par 100

b)

$$\begin{aligned} u_1 &= 5u_0 - 6 = 5 \times 14 - 6 = 64 \\ u_2 &= 5u_1 - 6 = 5 \times 64 - 6 = 314 \\ u_3 &= 5u_2 - 6 = 5 \times 314 - 6 = 1564 \\ u_4 &= 5u_3 - 6 = 5 \times 1564 - 6 = 7814 \end{aligned}$$

Conjecture:
 - Quand l'indice est pair les deux derniers chiffres sont 14
 - Quand l'indice est impair les deux derniers chiffres sont 64

2) a) Soit $m \in \mathbb{N}$, $u_{m+2} = 5u_{m+1} - 6$
 $= 5(5u_m - 6) - 6 = 25u_m - 36$
 $-36 \equiv 0 \pmod{4}$ et $25 \equiv 1 \pmod{4}$
 D'où $u_{m+2} \equiv u_m \pmod{4}$, par tout $m \in \mathbb{N}$

b) $u_0 = 14 \equiv 2 \pmod{4}$

On pose comme hypothèse de récurrence: " $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}, u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ "

- Initialisation: $u_0 = 14 \equiv 2 \pmod{4}$
 et $u_1 = 5u_0 - 6 = 64 \equiv 0 \pmod{4}$ } d'où l'hypothèse est initialisée

- On suppose l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'à un rang p

$u_{2(p+1)} = u_{2p+2}$, or, d'après la question 2 a)

$u_{2p+2} \equiv u_{2p} \pmod{4}$

$u_{2(p+1)+1} = u_{2p+3}$, or, d'après la question 2 a) $u_{2p+3} \equiv u_{2p+1} \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4}$

D'où l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $p+1$. (6)
 L'hypothèse est donc initialisée et héréditaire, donc, par le principe de récurrence.
 Par tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 28 [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0 [4]$

3) a) On pose la propriété de récurrence: $2u_n = 5^{n+2} + 3$

- Initialisation: $2u_0 = 28 = 5^{0+2} + 3$ - La propriété est initialisée

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang p :

$$\begin{aligned} 2u_{p+1} &= 2(5u_p - 6) = 10u_p - 12 \\ &= 5 \times 2u_p - 12 \\ &= 5 \times (5^{p+2} + 3) - 12 \\ &= 5^{p+3} + 3. \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $p+1$.

Elle est initialisée, héréditaire, donc, par le principe de récurrence

la propriété est vraie par tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire: $2u_n = 5^{n+2} + 3$, par tout $n \in \mathbb{N}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2u_n - 28 &= 5^{n+2} + 3 - 28 \\ &= 5^{n+2} - 25 \\ &= 5^{n+2} - 5^2 = 5^2(5^n - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } 5 &\equiv 1 [4] & 5^n &\equiv 1 [4] \\ \text{d'où } 5^n - 1 &\equiv 0 [4] \end{aligned}$$

Autrement dit: $\exists k \in \mathbb{N}, 5^n - 1 = 4k$

$$\text{D'où } 2u_n - 28 = 25 \times 4k = 100k$$

C'est-à-dire: $2u_n - 28 \equiv 0 [100]$

Donc: $2u_n \equiv 28 [100]$, par tout $n \in \mathbb{N}$

4) Supposons n pair: $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$

on a $2u_{2k} \equiv 28 [100]$ (d'après 3b))

$$\text{D'où } 2u_{2k} - 28 = 100q, \text{ avec } q \in \mathbb{Z}$$

$$u_{2k} - 14 = 50q$$

$$\Leftrightarrow u_{2k} = 50q + 14$$

$$\text{Or, } u_{2k} \equiv 2[4]$$

d'où:

$$50q + 14 \equiv 2[4]$$

$$\Leftrightarrow 50q + 12 \equiv 0[4]$$

$$\text{Or, } 12 \equiv 0[4]$$

$$\text{et } 50 \equiv 2[4]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où } q \equiv 2[4] \\ \text{c'est-à-dire } q - 2 = 4q', \quad q' \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$\text{d'où } q = 4q' + 2$$

$$\text{Alors } 50q + 14 = 50 \times (4q' + 2) + 14$$

$$= 200q' + 100 + 14 \equiv 14[100]$$

$$\text{Donc: } \underline{u_{2k} \equiv 14[100]} \text{ (les termes de rang pair finissent par 14)}$$

Supposons n impair: $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Or: } 2u_{2k+1} - 28 = 100q, \text{ avec } q \in \mathbb{Z}.$$

$$u_{2k+1} = 50q + 14$$

$$\text{Or, } u_{2k+1} \equiv 0[4]$$

$$\text{Alors } 50q + 14 \equiv 0[4]$$

$$14 \equiv 2[4] \quad \text{et} \quad 50q \equiv -2[4]$$

$$50q \equiv 2[4]$$

$$\text{Or, } 50 \equiv 2[4] \text{ d'où } q \equiv 1[4]$$

$$\text{c'est-à-dire: } q - 1 = 4q', \text{ avec } q' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow q = 4q' + 1$$

Alors:

$$u_{2k+1} = 50(4q' + 1) + 14$$

$$= 200q' + 50 + 14 = 200q' + 64 \equiv 64[100]$$

$$\text{Donc: } \underline{u_{2k+1} \equiv 64[100]} \text{ (les termes de rang impair finissent par 64).}$$