

Exercice (1):

1) Soit n_1 et n_2 , deux entiers pairs.

alors: $\exists k_1 \in \mathbb{Z}, n_1 = 2k_1$ et: $\exists k_2 \in \mathbb{Z}, n_2 = 2k_2$

Donc: $n_1 + n_2 = 2(\underbrace{k_1 + k_2}_{\in \mathbb{Z}})$ Donc $n_1 + n_2$ est pair

2) Soient $n_1 = 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$

$n_2 = 2k_2 + 1, k_2 \in \mathbb{Z}$ (n_1 : pair, n_2 : impair)

$n_1 + n_2 = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(\underbrace{k_1 + k_2}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$ Donc $n_1 + n_2$ est impair

3) Soit $n \in \mathbb{Z}, n$ pair: $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$

$n^2 = 4k^2 = 2 \times \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}$ Donc n^2 est pair

4) Soit $n \in \mathbb{Z}, n$ impair: $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$

Donc $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
 $= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$ Donc n^2 est impair

5) $a, b \in \mathbb{Z}$:

* Supposons a et b pairs: D'après la question 1), $a + b$ est pair
 D'après la question 3), $(a + b)^2$ est pair

* Supposons a pair et b impair: D'après la question 2), $a + b$ est impair

* Supposons a et b impairs: $a + b$ est pair et donc $(a + b)^2$ est pair
 D'après la question 4), $(a + b)^2$ est impair

Remarque: Comme a et b jouent des rôles symétriques, tous les cas possibles ont été traités.

Exercice (2): $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x^2 - 4y^2 = 20$

$$\Leftrightarrow (x + 2y)(x - 2y) = 20$$

Remarque: Comme $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, $x + 2y \in \mathbb{N}$ et $x + 2y \geq x - 2y$

Diviseurs de 20 = $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
(dans $\mathbb{N}$).

Cas possibles : ① $\begin{cases} x+2y=10 \\ x-2y=2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-2y=4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x+2y=20 \\ x-2y=1 \end{cases}$

① $\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

② $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x=9 \end{cases}$ impossible, car $x \in \mathbb{N}$

③ $\begin{cases} x+2y=20 \\ 2x=21 \end{cases}$ impossible, car $x \in \mathbb{N}$

Par conséquent :
un seul couple convient :
 $\{(6; 2)\}$

Verification : $6+2 \times 2 = 10$ et $6-2 = 2$

Exercice (3) :

a) $7 \mid m-5 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, m-5 = 7k$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, m = 7k+5$ } Donc : $S = \{7k+5, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $2n+1 \mid 6n-7$
or, $2n+1 \mid 2n+1$ } d'où $2n+1 \mid 6n-7-3(2n+1)$
c'est-à-dire $2n+1 \mid -10$

Remarque : $2n+1$ est un entier impair.

Diviseurs de -10 impairs = $\{1; -1; 5; -5\}$

Par disjonction des cas :

① $2n+1=1 \Rightarrow n=0$ ② $2n+1=-1 \Rightarrow n=-1$ ③ $2n+1=5 \Rightarrow n=2$ ④ $2n+1=-5 \Rightarrow n=-3$

(Verification : $0+1 \mid -10$ $-2+1 \mid -10$ $2 \times 2 + 1 \mid -10$ $2 \times (-3) + 1 \mid -10$)

Par conséquent : $\{0; -1; 2; -3\}$ sont les solutions

Exercice (4) : $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} d \mid 4n-5 \\ d \mid n+2 \end{cases}$ } $d \mid 4n-5-4(n+2) = -13$

Donc $d \in \{-1; 1; 13; -13\}$

Exercice (5):

(3)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Division euclidienne par 3: Il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$n = 3q + r \text{ avec } 0 \leq r < 3$$

c'est-à-dire: $r \in \{0, 1, 2\}$

Donc: $n = 3q$ ou $3q+1$ ou $3q+2$

Exercice (6):

1) Soit $n \in \mathbb{N}$: $n^2(n+6) + 12n + 8 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

Or, $(n+2)^3 = (n+2)(n+2)^2$

$$= (n+2)(n^2 + 4n + 4) = n^3 + 4n^2 + 4n + 2n^2 + 8n + 8$$

$$= n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

Donc: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^3 = n^2(n+6) + 12n + 8$

2) D'après la propriété de la division euclidienne, $12n+8$ sera le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 si:

$$\Leftrightarrow n^2 - 12n - 8 > 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 144 + 32 = 176 > 0$ d'où l'équation admet deux racines distinctes:

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{176}}{2} = \frac{12 + 4\sqrt{11}}{2} = 6 + 2\sqrt{11}$$

$$\text{et } n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 6 - 2\sqrt{11}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines. Or, $a = 1 > 0$

D'où $n \in]-\infty; \underbrace{6 - 2\sqrt{11}}_{\approx -0,6} \cup]\underbrace{6 + 2\sqrt{11}}_{\approx 12,6}; +\infty[$ donc: $n \geq 13$

Or, $n \in \mathbb{N}$

Exercice (7): * $n \in \mathbb{N}$, $3n+17 = (n+4) \times 3 + 5$ $n \in \{13, 14, \dots\}$

5 est alors le reste dans la division euclidienne de

$3n+17$ par $n+4$ à condition que: $0 \leq 5 < n+4$

d'où: $n \geq 1$

or, pour $n \in \{0, 1\}$:

$$0 \leq n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-n$$

$$* \quad 3n+17 = (n+4) \times 4 - n + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{or, } 4 \leq n+4 \leq 5 \text{ d'où } 0 \leq 1-n < n+4 \\ \text{reste} = 1-n \end{array} \right.$$