

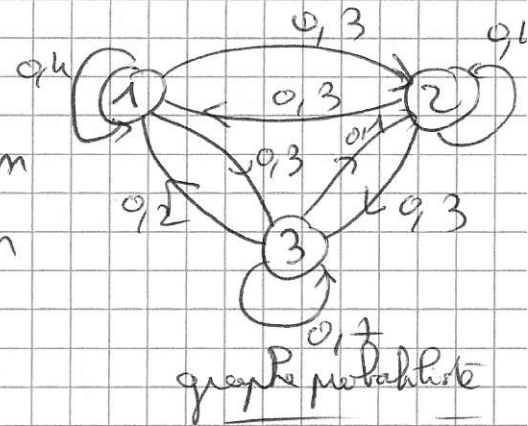
Cours exercices de spé TS

Preparation Bac

1

Ex (41):

$$1) \begin{cases} x_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n \\ y_{n+1} = 0,3x_n + 0,4y_n + 0,1z_n \\ z_{n+1} = 0,3x_n + 0,3y_n + 0,4z_n \end{cases}$$



2) a) on a $x_n + y_n + z_n = 1$

d'où $z_n = 1 - (x_n + y_n)$

b)
$$x_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2[1 - (x_n + y_n)]$$

$$= 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2$$

$$y_{n+1} = 0,3x_n + 0,4y_n + 0,1[1 - (x_n + y_n)]$$

$$= 0,2x_n + 0,3y_n + 0,1$$

~~$z_{n+1} =$~~

$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

d'où $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$
 et $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

3) $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

d'où $\det(I - A) = 0,8 \times 0,7 - 0,2 \times 0,1 \neq 0$
 d'où $I - A$ est inversible

Il existe une unique matrice-colonne C telle que: (2)

$$C = AC + B$$

$$(\Leftrightarrow C(I - A) = B)$$

On considère $C = (I - A)^{-1} B$ ~~$B(I - A)^{-1}$~~ $(I - A)C = B$

$$C = (I - A)^{-1} B$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,54} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,54} \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = C$$

(car si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$)

h) $V_m = U_m - C$, pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\underline{V_{m+1}} = U_{m+1} - C = A U_m + B - C$$

$$= A U_m + B - (AC + B)$$

$$= A(U_m - C) + B$$

$$= \underline{A V_m}, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

$$V_m = A^m V_0 \text{ (se montre par récurrence).}$$

- Initialisation : $V_0 = A^0 V_0$ car $A^0 = I$

d'où la propriété est initialisée

- Supposons la propriété vraie pour un certain rang n :

$$V_{n+1} = A V_n = A \times A^n V_0 = A^{n+1} V_0.$$

d'où la propriété est héréditaire

Par conséquent: Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c'est-à-dire:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \underline{V_n = A^n V_0}$$

5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(3)

a) $\det P = 2 + 1 = 3 \neq 0$ d'où P^{-1} existe.

avec: $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0,2 & -0,1 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} = D
\end{aligned}$$

b) On a $A = PDP^{-1}$

on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Or, $D^n = \begin{pmatrix} 0,1^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix}$ (se montre aussi par récurrence).

$$\begin{aligned}
\text{D'où } A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0,1^n & 0,4^n \\ -0,1^n & 2 \times 0,4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 0,1^n + 0,4^n & -0,1^n + 0,4^n \\ -2 \times 0,1^n + 2 \times 0,4^n & 0,1^n + 2 \times 0,4^n \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) On a montré que $V_n = A^n V_0$ (4)

Avec $V_n = U_n - C$ $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{45} \\ -\frac{1}{45} \end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} x_n - \frac{5}{18} \\ y_n - \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 0,1^n + 0,4^n & -0,1^n + 0,4^n \\ -2 \times 0,1^n + 2 \times 0,4^n & 0,1^n + 2 \times 0,4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{8}{45} \\ -\frac{1}{45} \end{pmatrix}$$

(4)

$$\text{D'ail } x_n = \frac{5}{18} = \frac{1}{3} \left(-\frac{8}{45} \times (2 \times 0,1^n + 0,4^n) - \frac{1}{45} (0,4^n - 0,1^n) \right)$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{5}{18} + \frac{1}{3} \left(-\frac{8}{45} (2 \times 0,1^n + 0,4^n) - \frac{1}{45} (0,4^n - 0,1^n) \right)$$

de même $y_n - \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \left(-\frac{16}{45} (0,4^n - 0,1^n) - \frac{1}{45} (0,1^n + 2 \times 0,4^n) \right)$

$$\Leftrightarrow y_n = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \left[-\frac{16}{45} (0,4^n - 0,1^n) - \frac{1}{45} (0,1^n + 2 \times 0,4^n) \right]$$

Comme $z_n = 1 - (x_n + y_n)$

$$z_n = 1 - \left[\frac{5}{18} + \frac{1}{3} \left(-\frac{8}{45} (2 \times 0,1^n + 0,4^n) - \frac{1}{45} (0,4^n - 0,1^n) \right) + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \left(-\frac{16}{45} (0,4^n - 0,1^n) - \frac{1}{45} (0,1^n + 2 \times 0,4^n) \right) \right]$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

d) $0,1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $-1 < 0,1 < 1$

$0,4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $-1 < 0,4 < 1$

Donc: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{18}$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{9}$

D'ail: $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{18} - \frac{2}{9} \right) = \frac{1}{2}$

A long terme, les probabilités d'être (1), (2) et (3) sont respectivement de $\frac{5}{18}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{2}$

Ex (42): Soient

Au départ: 20 souris juvéniles c'est-à-dire: $j_0 = 20$

Aucune adulte c'est-à-dire: $a_0 = 0$

D'ail $T_0 = a_0 + j_0 = 20$

(5)

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a_n	j_n	T_n	j_n/T_n	a_n/T_n	T_{n+1}/T_n
2	0	0	20	20	1	0	2
3	1	5	20	25	0,8	0,2	1,25
4	2	5	60	65			
5	3	15	100	115			

2)a) $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$

* $U_{n+1} = L U_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$

or, $j_{n+1} = j_n + 8a_n$ et $a_{n+1} = \frac{1}{4}j_n$
 d'où $L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

b) Par récurrence, on montre que $U_n = L^n U_0$

- Initialisation:

$U_0 = L^0 U_0$ car $L^0 = I$. (propriété initialisée)

- Hérédité:

On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang n .

$U_{n+1} = L U_n = L \times L^n U_0 = L^{n+1} U_0$
 (hyp. de récurrence) propriété à héréditer.

Par conséquent : la propriété est vraie pour tous les rangs $n \in \mathbb{N}$

par le principe de récurrence

C'est-à-dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = L^n U_0$

3) $P = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\det P = 8 + 4 = 12 \neq 0$ donc P^{-1} existe.

et $P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

B.)

(6)

$$P^{-1}LP = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D \text{ (matrice diagonale)}$$

c) $P^{-1}LP = D$ d'où $L = PDP^{-1}$

d) $L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

On montre par récurrence que: $L^m = PD^mP^{-1}$

avec $D^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$

$$L^m = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \times 2^m & -4 \times (-1)^m \\ 2^m & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8 \times 2^m}{3} + \frac{(-1)^{m+1}}{3} & \frac{8 \times 2^m}{3} - \frac{8}{3}(-1)^m \\ \frac{2^m}{3} + \frac{(-1)^{m+1}}{12} & \frac{2^m}{3} + \frac{2}{3}(-1)^m \end{pmatrix}$$

e) On a montré que $U_n = L^n U_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_n \\ a_n \end{pmatrix} = L^n \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_n \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2^m + (-1)^{m+1} & 8 \times 2^m - 8(-1)^m \\ \frac{2^m}{4} + \frac{(-1)^{m+1}}{4} & 2^m + 2(-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'aut $j_n = \frac{20}{3} [2 \times 2^n + (-1)^n]$ (7)
 et $a_n = \frac{20}{3} \left[\frac{2^n}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4} \right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{j_n}{T_n} = \frac{\frac{20}{3} (2 \times 2^n + (-1)^n)}{\frac{20}{3} (2 \times 2^n + (-1)^n + \frac{2^n}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4})}$

$\frac{a_n}{T_n} = \frac{\frac{20}{3} (\frac{2^n}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4})}{\frac{20}{3} (2 \times 2^n + (-1)^n + \frac{2^n}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4})}$

$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\frac{20}{3} (2 \times 2^{n+1} + (-1)^{n+1} + \frac{2^{n+1}}{4} + \frac{(-1)^{n+2}}{4})}{\frac{20}{3} (2 \times 2^n + (-1)^n + \frac{2^n}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4})}$

$\frac{a_n}{T_n} = \frac{\cancel{2^n} \left(\frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4 \times 2^n} \right)}{\cancel{2^n} \left(2 + \frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4 \times 2^n} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}}$

b)

D'aut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{T_n} = \frac{1}{9}$

$\frac{j_n}{T_n} = \frac{\cancel{2^n} (2 + \frac{(-1)^n}{2^n})}{\cancel{2^n} (2 + \frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4 \times 2^n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{j_n}{T_n} = \frac{8}{9}$

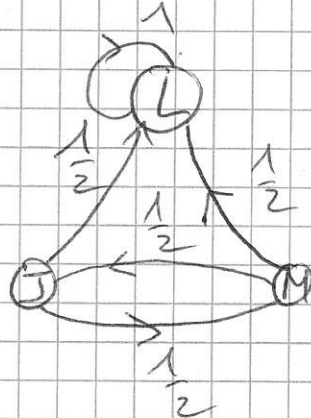
$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{2^{n+1} (2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4 \times 2^{n+1}})}{2^n (2 + \frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4 \times 2^n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left[\frac{2 + \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \right] = 2$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = 2$

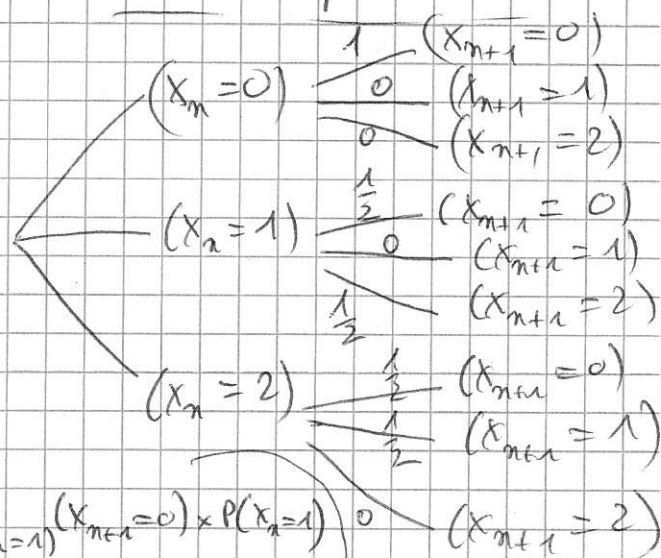
Plus les années augmentent, plus la population d'une année à la suivante se stabilise au double.

Ex 55:

$L \rightarrow M \rightarrow J$



Arbre de probabilité:



$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1}=0) &= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) \times P(X_n=0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) \times P(X_n=1) \\
 &\quad + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) \times P(X_n=2) \quad (\text{Probabilités totales}) \\
 &= 1 \times P(X_n=0) + \frac{1}{2} P(X_n=1) + \frac{1}{2} P(X_n=2) \quad (\text{d'après l'arbre})
 \end{aligned}$$

$$P(X_{n+1}=1) = P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} P(X_n=2)$$

$$P(X_{n+1}=2) = P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} P(X_n=1)$$

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

D'où: $U_{n+1} = A U_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Propriété: $U_n = A^n U_0$

- Initialisation: $A^0 = I$ d'où $U_0 = A^0 U_0$ (propriété initialisée)

- Hérité: On suppose la propriété vraie par un certain rang n :

$$U_{n+1} = A U_n = A \times A^n \times U_0 = A^{n+1} U_0$$

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie par tout $n \in \mathbb{N}^*$

(est-à-dire: par tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A^n U_0$)

$$c) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A la calculatrice, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = D.$$

d'où $A = PDP^{-1}$

On montre par récurrence que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ avec } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \times (\frac{1}{2})^n \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n \\ 0 & -(-\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 - (\frac{1}{2})^n \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} + (\frac{1}{2})^{n+1} \\ 0 & -(-\frac{1}{2})^n \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^{n+1} & -(-\frac{1}{2})^{n+1} + (\frac{1}{2})^{n+1} \end{pmatrix}$$

ou $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où :

$$\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^{n+1}} (1 + (-1)^n) & \frac{1}{2^{n+1}} (1 - (-1)^n) \\ 0 & \frac{1}{2^{n+1}} (1 - (-1)^n) & \frac{1}{2^{n+1}} (1 + (-1)^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^{n+1}} (1 + (-1)^n) \\ \frac{1}{2^{n+1}} (1 - (-1)^n) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(X_n=0) &= 1 - \frac{1}{2^n} \\ P(X_n=1) &= \frac{1}{2^{n+1}} (1 + (-1)^n) \\ P(X_n=2) &= \frac{1}{2^{n+1}} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \underline{1}$$

Plus le nombre d'étapes augmente, plus le kamster va
finir par rester dans la litière (il est fatigué ---).