Spé TS

Correction des exercices d'arithmétique (entraînement bac)

72 Partie A :

Soient a, b, 2 entiers naturels tels que a et b sont premiers entre eux
c, un autre entier naturel tel que $a | bc$.
Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout :

$$\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \ au + bv = 1 \quad (*)$$

On multiplie $(*)$ par c : d'où $acu + bcv = c$

$a | ac$ et $a | bc$ d'où $a | acu + bcv = c$ (CQFD).

(a divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de ac et bc).

Partie B : Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

1) $u_0 = 2^0 + 3^0 + 6^0 - 1 = 3 - 1 = \boxed{2}$ $u_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = \boxed{48}$

$u_1 = 2 + 3 + 6 - 1 = \boxed{10}$ $u_3 = 2^3 + 3^3 + 6^3 - 1 = \boxed{250}$

$u_4 = \boxed{1392}$ $u_5 = \boxed{8050}$

2) u_0 et u_1 ne sont pas des multiples de 4. D'où la conjecture de l'élève est fausse.

3) $(E) = \{$nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite $(u_n)\}$

a) $2 | u_0$ $3 | u_2$ $5 | u_1$ $8050 = 7 \times 1150$ d'où $7 | u_5$

Donc 2, 3, 5 et 7 appartiennent à (E).

b) p nombre premier avec, $p > 3$

$$6u_{p-2} = 6 \times (2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1)$$

$$6u_{p-2} = \cancel{6(2^{p-2}} \ 3 \times 2^{p-1} + 2 \times 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$$

d'où $6u_{p-2} = 3(2^{p-1} - 1) + 2(3^{p-1} - 1) + (6^{p-1} - 1)$

or, p est un nombre premier > 3, d'où $p \nmid 3$, $p \nmid 2$, $p \nmid 6$

on peut utiliser le petit théorème de Fermat : ②

2 et p sont premiers entre eux d'où $2^{p-1} \equiv 1 [p]$

de même $3^{p-1} \equiv 1 [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1 [p]$.

D'où : $6u_{p-2} \equiv 0 [p] \iff \underline{p \mid 6u_{p-2}}$

comme p et 6 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss,

$p \mid u_{p-2}$

Tout d'abord (E) contient 2 et 3 (question 3a).

et (E) contient tous les nombres premiers $p > 3$.

Réciproquement, si $p \in (E)$, alors p est premier.

Par conséquent : $\underline{(E) = \{\text{ensemble des nombres premiers}\}}$

Exercice 74

1) p nombre premier impair (d'où $p \geqslant 3$)

a) Alors p et 2 sont premiers entre eux, d'où $2^{p-1} \equiv 1 [p]$

on pose $k = p-1$, k entier naturel dans $[2; +\infty[$

D'où $\underline{2^k \equiv 1 [p]}$

b) $2^k \equiv 1 [p]$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$

si $k \mid n$, alors : $\exists q \in \mathbb{N}$, $n = kq$

d'où $2^n = 2^{kq}$. or, $2^k \equiv 1 [p]$

d'où $2^{kq} = (2^k)^q \equiv 1 [p]$

d'où $2^n \equiv 1 [p]$

b) $b \in \mathbb{N}^*$, b est le plus petit tel que $2^b \equiv 1 [p]$

Division euclidienne de n par b : $n = bq + r$, avec $0 \leq r < b$

$2^n = 2^{bq+r}$. Supposons $r \neq 0$:

$2^n = (2^b)^q \times 2^r$. or, $2^b \equiv 1 [p]$ d'où $2^n \equiv 2^r [p]$

D'où $2^r \equiv 1 [p]$

or, $r < b$ et b est le plus petit entier qui vérifie $2^b \equiv 1 [p]$

ce qui est contradictoire

Donc : $r = 0$

c'est-à-dire : $n = bq \iff \boxed{b | n}$

2) q : nbre premier impair, $A = 2^q - 1$

p : un facteur premier de A

a) on a $p | A = 2^q - 1 \iff 2^q - 1 \equiv 0 [p]$

$\iff 2^q \equiv 1 [p]$

b) Supposons p pair : (on va raisonner par l'absurde)

comme p premier, $p = 2$ (seul nombre premier pair)

or, $2^q \equiv 1 [p]$ d'où $2^q \equiv 1 [2]$

$\iff 2^q - 1$ est pair

$\iff 2^q$ est impair

$\iff q = 0$, or q est impair et premier (contradiction)

Donc p est impair

c) $2^b \equiv 1 [p]$, b le plus petit entier non-nul vérifiant la propriété précédente.

p est un nombre premier impair et $2^q \equiv 1 [p]$

donc $b | q$ (d'après 1))

or, q est un nombre premier, d'où $b = 1$ ou $b = q$

Supposons $b = 1$: alors $2 \equiv 1 [p] \iff p | 1$, or p premier

$\iff p = 1$ contradiction

D'où $\boxed{b = q}$

d) On a $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ d'après 1c) $b | p - 1$ or, $b = q$ d'après 2c)

Donc $\boxed{q | p-1}$

Or, p impair d'où $p-1$ est pair

c'est-à-dire $2 \mid p-1$

et q et 2 premiers entre eux

d'après le théorème de Gauss $\Big\}$ $2q \mid p-1$

$\Leftrightarrow p-1 \equiv 0 [2q]$

$\Leftrightarrow \boxed{p \equiv 1 [2q]}$

3) $A_1 = 2^{17} - 1$

17 est impair et premier $\Big)$ Soit p un diviseur premier de A_1

D'après 2) d), $p \equiv 1 [34] \Leftrightarrow 34 \mid p-1$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ p-1 = 34k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ p = 34k+1$

Or, $\sqrt{A_1} = \sqrt{2^{17}-1} \simeq 362 \leq 362$

Les diviseurs premiers de A_1 sont à chercher dans $[2 ; 362]$ et sont de la forme $34k+1$

Or, les seuls diviseurs possibles seraient 103, 137, 239, ou 307 (d'après l'énoncé)

A la calculatrice, on constate qu'aucun ~~de~~ ne divise A_1

Par conséquent : $\underline{A_1 \text{ est un nombre premier}}$