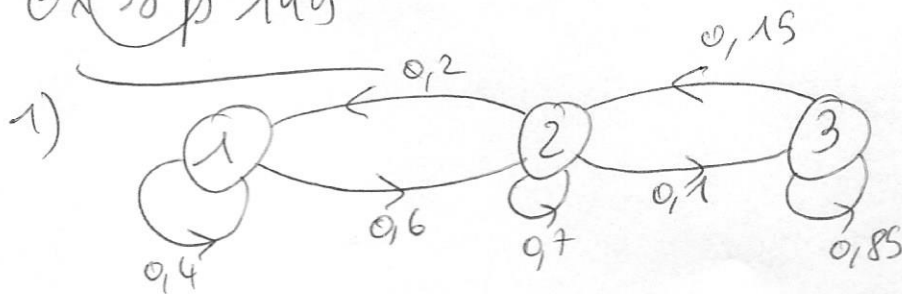


3x38 p 149

(1)



2) X_n : niveau choisi par le client à l'année $2012+n$

a) $P(X_0=1)=0,2$ $P(X_0=2)=0,7$, $P(X_0=3)=0,1$
(d'après les données de l'enquête).

b) $P_n = (P(X_n=1) \quad P(X_n=2) \quad P(X_n=3))$

$$P(X_{n+1}=1) = P[(X_{n+1}=1) \cap (X_n=1)] + P[(X_{n+1}=1) \cap (X_n=2)]$$

$$= P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n=1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) \times P(X_n=2)$$

donc $P(X_{n+1}=1) = 0,4 \times P(X_n=1) + 0,2 \times P(X_n=2)$ (d'après l'enquête)

c) $P(X_{n+1}=2) = P[(X_{n+1}=2) \cap (X_n=1)] + P[(X_{n+1}=2) \cap (X_n=2)]$
 $+ P[(X_{n+1}=2) \cap (X_n=3)]$

$$= P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=2)$$

$$+ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2) \times P(X_n=3)$$

$$= 0,6 P(X_n=1) + 0,7 \times P(X_n=2) + 0,15 \times P(X_n=3)$$

$$P(X_{n+1}=3) = P[(X_{n+1}=3) \cap (X_n=1)] + P[(X_{n+1}=3) \cap (X_n=2)] + P[(X_{n+1}=3) \cap (X_n=3)]$$

$$= P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3) \times P(X_n=1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3) \times P(X_n=2) + P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3) \times P(X_n=3)$$

$$= 0 + 0,1 \times P(X_n=2) + 0,85 \times P(X_n=3)$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$: $P_{n+1} = (P(X_{n+1}=1) \quad P(X_{n+1}=2) \quad P(X_{n+1}=3))$

$$d'où P_{n+1} = (0,4 P(X_n=1) + 0,2 P(X_n=2) + 0,6 P(X_n=1) + 0,7 P(X_n=2) + 0,15 P(X_n=3)) \quad (2)$$

$$0,1 P(X_n=2) + 0,85 P(X_n=3)$$

$$= \underbrace{(P(X_n=1) \quad P(X_n=2) \quad P(X_n=3))}_{= P_n} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

d) Par récurrence :

- Initialisation : $M^0 = I$, d'où $P_0 M^0 = P_0$
la propriété est donc initialisée

- Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

$$P_{n+1} = P_n \times M = \underbrace{(P_0 M^n)}_{\text{(hyp. de récurrence)}} \times M = P_0 \times M^{n+1} \quad (\text{car le produit matriciel est associatif}).$$

d'où la propriété est héréditaire

La propriété étant initialisée et héréditaire, par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Donc : pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad P_n = P_0 M^n$$

3) a) $2015 = 2012 + 3$ d'où pour $n = 3$.

$$P_3 = P_0 \times M^3 = (0,2 \quad 0,4 \quad 0,1) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}^3$$

$$= (0,20375 \quad 0,97186 \quad 0,22439)$$

Le niveau ② comptera le plus d'adhérents en 2015

b) M^2 ne contient que des coefficients strictement positifs.

donc le processus a un unique état stable

Notons $P = (x \quad y \quad z)$ cet état stable

Alors:

$$P = P \times M$$

$$\Leftrightarrow (x \ y \ z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (x \ y \ z) = (0,4x + 0,2y \quad 0,6x + 0,7y + 0,15z \quad 0,1y + 0,85z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,4x + 0,2y \\ y = 0,6x + 0,7y + 0,15z \\ z = 0,1y + 0,85z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6x = 0,2y \\ y = \frac{0,6}{0,2} y + 0,7y + 0,15z = 0,9y + 0,15z \\ z = 0,1y + 0,85z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} y \\ y = \frac{0,15}{0,1} z = \frac{3}{2} z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} y \\ y = \frac{3}{2} z \\ \frac{1}{2} z + \frac{3}{2} z + z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $P = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right)$

Au bout d'un certain temps, - $\frac{1}{6}$ des adhérents choisissent le niveau (1)
 - La moitié choisissent le niveau (2)
 - Le tiers choisissent le niveau (3)

Exercice (40) p 149 (Hyperbole TS spé).

(1)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n - 0,2b_n + 0,07 \\ b_{n+1} = -0,4a_n + 0,7b_n + 0,1 \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Partie (A) :

$$1) \overline{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

d'où $U_{n+1} = AU_n + C$ avec : $A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

$$2) S = AS + C \Leftrightarrow S - AS = C$$

$$\Leftrightarrow (I - A) \times S = C$$

S existe si et seulement si $I - A$ est inversible.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \text{ et } \det(I - A) = 0,3 \times 0,3 - 0,4 \times 0,2 = 0,09 - 0,08 = 0,01 \neq 0$$

d'où $I - A$ est inversible.

$$\text{Donc } S \text{ existe et } S = (I - A)^{-1} \times C$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,01} \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } S = \frac{1}{0,01} \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \boxed{S = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}}$$

Partie (B) :

$$1) a) \overline{V}_n = U_n - S$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}: \quad \underline{V}_{n+1} &= U_{n+1} - S = AU_n + C - S \\ &= AU_n + C - (AS + C) \text{ (car } S = AS + C) \\ &= A(U_n - S) = \underline{AV_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) Par récurrence:

- Initialisation: $V_0 = A^0 \times V_0$ car $A^0 = I$

d'où la propriété est initialisée.

- Hérédité: Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = A V_n = A \times A^n V_0 = A^{n+1} \times V_0, \text{ d'où la propriété est } \underline{\text{héréditaire}}.$$

(hyp. de récurrence)

La propriété est initialisée, elle est héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc: $V_n = A^n V_0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$

On a: $U_n = V_n + S = A^n V_0 + S = A^n (U_0 - S) + S, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$

2) EN 2012: $U_{2012} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

$U_{2013} = A U_{2012} + C$

$= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,23 \end{pmatrix}$ EN 2013, l'espèce A aura une proportion de 0,15

$U_{2016} = A^{2016} \times ($

$U_1 = A (U_0 - S) + S = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,03 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,13 \\ 0,23 \end{pmatrix}$

$U_1 = A U_0 + C = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,23 \end{pmatrix}$ EN 2013, A a une proportion de 0,15

EN 2016, $U_4 = A^4 (U_0 - S) + S = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{pmatrix}^4 \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$
EN 2016, la proportion de A est d'environ 0,07