

① Montrer que  $2^{11} + 1$  est divisible par 3. ①

Solution:

$$2 \equiv -1 \pmod{3} \text{ car } 2 = 3 \times 1 + (-1)$$

$$\text{d'où } 2^{11} \equiv -1 \pmod{3} \text{ car } 11 \text{ est impair}$$

$$\text{c'est-à-dire } 2^{11} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow 2^{11} + 1 \text{ est divisible par } 3$$

② Montrer que  $5^{10} + 1$  est divisible par 13.

Solution:

$$5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{13} \text{ car } 25 = 13 \times 2 + (-1)$$

$$\text{d'où } (5^2)^5 \equiv -1 \pmod{13} \text{ car } 5 \text{ est impair}$$

$$\text{Donc: } 5^{10} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$\Leftrightarrow 5^{10} + 1 \text{ est divisible par } 13$$

③ Quel est le reste dans la division euclidienne par 17 de  $2^{2012}$  ?

Solution:  $2^4 = 16 \equiv -1 \pmod{17} \text{ car } 16 = 1 \times 17 + (-1)$

$$(2^4)^{503} \equiv -1 \pmod{17} \text{ car } 503 \text{ est impair}$$

$$\text{c'est-à-dire } 2^{2012} \equiv -1 \pmod{17}$$

$$\equiv 16 \pmod{17}$$

Donc: 16 est le reste dans la division euclidienne par 17 de  $2^{2012}$

④ Déterminer le reste dans la division euclidienne ②  
par 8 de  $7^k + 1$ , selon les valeurs de  $k \in \mathbb{N}$ :

Solution:

$$7 \equiv -1 [8] \text{ car } 7 = 1 \times 8 + (-1)$$

$$\text{d'où } 7^k \equiv (-1)^k [8]$$

$$\text{Donc: } 7^k + 1 \equiv (-1)^k + 1 [8]$$

- si k est impair:  $(-1)^k = -1$

$$\text{Donc: } 7^k + 1 \equiv 0 [8] \text{ (reste = 0)}$$

c'est-à-dire  $7^k + 1$  est divisible par 8

- si k est pair:  $(-1)^k = 1$

$$\text{Donc: } 7^k + 1 \equiv 2 [8]$$

et  $7^k + 1$  n'est pas divisible par 8  
et le reste = 2