Spécialité maths : (5 pts)

ROC : Questions de cours (/1 pt)

Soient a,b,c et d, quatre entiers , n un entier naturel non nul :

- 1) Montrer que si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$, alors $ac \equiv bd [n]$
- 2) Soit p, entier naturel, montrer que si $a \equiv b [n]$, alors $a^p \equiv b^p [n]$

Problème (/ 4 pts)

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- En 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins
- Chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville
- Chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n : l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n
- C_n : l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n

On a donc : $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$

- 1) On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$
 - a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$
 - b) Calculer U_1 . En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011
- 2) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0
- 3) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P.
(On la notera P^{-1})
- 4) a) On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer D à l'aide de la calculatrice.
b) Démontrer que $M = PDP^{-1}$
c) Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul : $M^n = PD^nP^{-1}$
- 5) a) On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

- b) Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$

Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?