

NOM :Prénom :

Spé Maths TS	Contrôle de mathématiques : <i>Matrices (opérations, inverse) / Congruences</i>	18/12/2017
--------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	------------

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE :

/20

Exercice 1 : Soient les matrices A et B suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) Justifier que le produit $A \times B$ est possible

- 2) Calculer ce produit en détaillant les calculs

Exercice 2 :

On considère le système (S) suivant :
$$\begin{cases} 5x - 2y = -\frac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

- 1) En posant $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B une matrice de dimension 2×1 à déterminer, montrer soigneusement que le système (S) est équivalent à l'égalité $AX = B$

NOM :Prénom :

2) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en justifiant

3) Montrer que $X = A^{-1} \times B$

4) En déduire la résolution de (S)

Exercice 3 :

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer soigneusement que $M^2 - 3M = -2I_3$ où I_3 est la matrice identité de dimension 3×3

2) En déduire que $M \times \left[-\frac{1}{2}(M - 3I_3)\right] = I_3$

NOM :Prénom :

- 3) Conclure que M est inversible et expliciter M^{-1}

Exercice 4 :

On considère l'équation (E) suivante : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

- 1) Démontrer l'équivalence suivante : $(x ; y)$ solution de (E) $\Leftrightarrow 3x^2 \equiv 2^n [7]$

- 2) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de $3x^2$ par 7 ?

- 3) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 2^n par 7 ?

- 4) En déduire la résolution de l'équation (E)