

NOM : Prénom :

Spé TS Maths	Devoir de mathématiques : <i>Matrices/PGCD/Théorème de Bézout/Théorème de Gauss</i>	Lundi 19/02/2018
-----------------	---	------------------

- Calculatrices autorisées
- Durée : 45 min

Observations :

NOTE : **/20**

Exercice 1 : Cours et applications

- 1) Énoncer et démontrer le théorème de Bézout
- 2) Énoncer et démontrer le théorème de Gauss
- 3) Déterminer tous les couples d'entiers $(x; y)$ tels que : $11x - 7y = 0$
- 4) a) Montrer que l'équation $9x + 5y = 1$ admet au moins un couple d'entiers solution
b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de cette équation

Exercice 2 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer J^2 et J^3 . En déduire une relation simple entre J^n et J , pour tout n , entier naturel
- 2) Exprimer A , A^2 et A^3 en fonction de I et J
- 3) Montrer pour tout n entier naturel que $A^n = I + \frac{5^n - 1}{2} J$

Exercice 3 :

Les questions sont indépendantes

- 1) Résoudre le système suivant (les solutions des entiers naturels) :

$$\begin{cases} xy = 7776 \\ PGCD(x; y) = 18 \end{cases}$$

- 2) Soit n , un entier naturel, montrer que $a = 21n + 4$ et $b = 16n + 3$ sont premiers entre eux.
- 3) Soient a et b , deux entiers naturels, montrer que si $ab \equiv 0 [19]$, alors $a \equiv 0 [19]$ ou $b \equiv 0 [19]$