NOM :.................................Prénom :....................................

CORRIGÉ Fait 6.

Spé Maths TS	**Contrôle de mathématiques :** *Matrices (opérations, inverse) / Congruences*	18/12/2017

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE : /20

Total /20

/2,5 **Exercice 1 :** Soient les matrices A et B suivantes : $A=\begin{pmatrix}5&2&1\\0&3&4\\1&-1&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&-3\\4&2\end{pmatrix}$

1) Justifier que le produit A×B est possible nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B

(1) D'où on peut calculer A × B

2) Calculer ce produit en détaillant les calculs

$$A\times B=\begin{pmatrix}5&2&1\\0&3&4\\1&-1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0\\2&-3\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times(-1)+2\times2+1\times4 & -4\\0\times(-1)+3\times2+4\times4 & -1\\1\times(-1)+(-1)\times2+2\times4 & 7\end{pmatrix}$$

(1,5)
$$=\begin{pmatrix}3&-4\\22&-1\\5&7\end{pmatrix}$$

/7 **Exercice 2 :**

On considère le système (S) suivant : $\begin{cases}5x-2y=-\frac{17}{2}\\ -2x+3y=10\end{cases}$

1) En posant $A=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et B une matrice de dimension 2×1 à déterminer, montrer soigneusement que le système (S) est équivalent à l'égalité AX = B

$$AX=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x-2y\\-2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{17}{2}\\10\end{pmatrix}\iff\begin{cases}5x-2y=-\frac{17}{2}\\-2x+3y=10\end{cases}$$

(1,5)
$(S)\iff AX=B$ en posant $B=\begin{pmatrix}-\frac{17}{2}\\10\end{pmatrix}$

NOM :……………………………Prénom :………………………………

2) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} en justifiant

$\det A = \det \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 5\times 3 - (-2)\times(-2) = 15-4 = 11 \neq 0$

1

D'où A est inversible $\left(\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors : } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)$

1,5

d'où $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$

3) Montrer que $X = A^{-1}\times B$

$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_2}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

1,5

4) En déduire la résolution de (S)

1,5

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{51}{22} + \frac{20}{11} \\ -\frac{17}{11} + \frac{50}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{22} \\ \frac{33}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}}$

Exercice 3 : ~~4,5~~

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer soigneusement que $M^2 - 3M = -2I_3$ où I_3 est la matrice identité de dimension 3×3

$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -3 \\ 3 & 10 & 3 \\ -3 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

1,5

$M^2 - 3M = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -3 \\ 3 & 10 & 3 \\ -3 & -9 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -9 & -3 \\ 3 & 12 & 3 \\ -3 & -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$= -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= -2I_3$

2) En déduire que $M \times [-\frac{1}{2}(M - 3I_3)] = I_3$

$M^2 - 3M = -2I_3$

$\Leftrightarrow M(M-3I) = -2I_3$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\times M(M-3I) = I_3$ 1,5

$\Leftrightarrow M\left[-\frac{1}{2}(M-3I)\right] = I_3$

NOM :……………………………Prénom :……………………………

3) Conclure que M est inversible et expliciter M^{-1}

On a montré que $M \times A = I_3$ d'où M est inversible

et $M^{-1} = -\frac{1}{2}(M-3I) = -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$

1,5

$= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$

Exercice 4 : 16

On considère l'équation (E) suivante : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer l'équivalence suivante : (x ;y) solution de (E) $\Leftrightarrow$ $3x^2 \equiv 2^n$ [7]

$10^2 = 100 \equiv 2[7]$, d'où $10^{2n} \equiv 2^n[7]$ (car si $a \equiv b[n]$, alors : $a^p \equiv b^p[n]$, pour tout $p \in \mathbb{N}$)

1,5 $7x^2 \equiv 0[7]$, $3x^2 + 7y^2 \equiv 10^{2n}[7]$

or, $10^{2n} \equiv 2^n[7]$, d'où par transitivité de la relation de congruence, $\underline{3x^2 \equiv 2^n[7]}$

2) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de $3x^2$ par 7 ?

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1
$3x^2 \equiv$	0	3	5	6	6	5	3

1,5 Restes modulo 7

3) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 2^n par 7 ?

$2^3 = 8 \equiv 1[7]$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2^{3k} \equiv 1[7]$

$2^{3k+1} \equiv 2[7]$ $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

1,5

or, $n \in \mathbb{N}$: $n = 3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$

Donc : les restes possibles dans la division euclidienne de 2^n par 7 sont :

1, 2 ou 4

4) En déduire la résolution de l'équation (E)

Dans la 2), on a vu que les restes possibles dans la division euclidienne de $3x^2$ par 7 sont 0, 3, 5, 6

1,5 or, les seuls restes dans la division euclidienne de 2^n par 7 sont : 1, 2 ou 4

Donc l'équation (E) n'admet pas de solutions en nombres entiers