Spé TS
Maths

Corrigé de l'exercice de spécialité (Bac Blanc St Jean)

1

Question de cours : (/1)

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1) $a \equiv b\,[n] \iff n \mid a-b$
$c \equiv d\,[n] \iff n \mid c-d$
n divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $a-b$ et $c-d$

En particulier : $n \mid \underbrace{c\times(a-b)+b(c-d)}_{=ac-bd}$

$\iff \underline{ac \equiv bd\,[n]}$

2) Raisonnons par récurrence :

* Initialisation : Pour $p=0$
si $a \equiv b\,[n]$, $a^0 = 1$, $b^0 = 1$ d'où $a^0 \equiv b^0\,[n]$
la propriété est initialisée

* Hérédité : Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang p
alors $a^p \equiv b^p\,[n]$ d'où $a^p \times a \equiv b^p \times b\,[n]$
(d'après la question 1))
c'est-à-dire : $a^{p+1} \equiv b^{p+1}\,[n]$
la propriété est héréditaire

Donc : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $a \equiv b\,[n]$, alors $a^p \equiv b^p\,[n]$

Problème : (/4)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9R_n + 0{,}05C_n \\ 0{,}1R_n + 0{,}95C_n \end{pmatrix}$ (Traduction de l'énoncé)

$= \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \underline{MU_n}$

b) $U_1 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,9 \times 90 + 0,05 \times 30 \\ 0,1 \times 90 + 0,95 \times 30 \end{pmatrix}$

$= \boxed{\begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}}$

Alors $R_1 = 82,5$ et $C_1 = 37,5$

En 2011, il y a 82,5 millions de ruraux et 37,5 millions de citadins.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$: Montrons par récurrence que $U_n = M^n \times U_0$

* Initialisation : $M^0 = I$, d'où $M^0 \times U_0 = U_0$ (la propriété est initialisée)

* Hérédité : Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} = M \times U_n = M \times M^n \times U_0$ (hypothèse de récurrence)

$= M^{n+1} \times U_0$ (la propriété est héréditaire)

comme la propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n \times U_0$

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\det P = 1 \times (-1) - 2 \times 1 = -3 \neq 0$

d'où P est inversible. (si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det P \neq 0$ alors $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$)

d'où $P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Remarque : Pour répondre à cette question, il suffisait de montrer que :

$P \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = I$

4) a) $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\underset{\text{(à la calculatrice)}}{=} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix} = D}$

b) $D = P^{-1}MP$

$\Leftrightarrow PD = \underbrace{PP^{-1}}_{=I}MP$

$\Leftrightarrow PD = MP$

$\Leftrightarrow PDP^{-1} = M\underbrace{PP^{-1}}_{=I}$

$\Leftrightarrow \boxed{PDP^{-1} = M}$

c) Par récurrence:

* Initialisation: Pour $n=1$: $PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = M^1$

la propriété est initialisée

* Hérédité: On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

$M^{n+1} = M \times M^n = M \times P \times D^n \times P^{-1}$

$= PD\underbrace{P^{-1} \times P}_{=I}D^nP^{-1}$

$= PD \times D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} = M^{n+1}$

la propriété est héréditaire

Donc: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$

5) a) D'après 2), $U_n = M^n \times U_0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} R_n = 90 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) + 30\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \\ C_n = 90 \times \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) + 30\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_n = 40 + 0{,}85^n \times 50 \\ C_n = 80 + 0{,}85^n \times (-50) \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

b) $0 < 0{,}85 < 1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$

donc $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 40}$

de même, $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 80}$

A l'avenir, il y aura plus de citadins que de ruraux.

Plus les années augmentent, plus la population de ruraux se stabilise autour de 40 millions d'habitants.

Pour les citadins, la population va se stabiliser autour de 80 millions d'habitants.