Spé TS Maths

Correction de l'exercice du bac blanc n° 2

(Fait le 04/04/2018)

1

Partie (A) :

HILL

HI $\rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} = x_1 \\ = x_2 \end{matrix}$ on a $Y = AX$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5\times 7 + 2\times 8 \\ 7\times 7 + 7\times 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 35+16 \\ 49+56 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 51 \\ 105 \end{pmatrix}$

$51 = 26\times 1 + 25$, avec $0 \leq 25 < 26$
d'où $r_1 = 25$

0,5

et $105 = 26\times 4 + 1$, avec $0 \leq 1 < 26$
d'où $r_2 = 1$, d'où HI se code en ZB

LL $\rightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$ on a $Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5\times 11 + 2\times 11 \\ 7\times 11 + 7\times 11 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 77 \\ 154 \end{pmatrix}$

$77 = 26\times 2 + 25$, avec $0 \leq 25 < 26$
d'où $r_1 = 25$

$154 = 26\times 5 + 24$, avec $0 \leq 24 < 26$
d'où $r_2 = 24$, d'où LL se code en ZY

Par conséquent : HILL se code en ZBZY

Partie (B) :

1) $(E) : 21x - 26y = 1$

a) 21 et 26 sont premiers entre eux

D'après le théorème de Bezout, (E) admet alors des solutions entières. 0,25 2

b) $21\times(-21)-26\times(-17)=-441+442=1$ 0,25

Donc $(-21;-17)$ est une solution particulière de (E).

c) Soit $(x;y)$ solution de (E) :

$$\begin{cases} 21x-26y=1 \\ 21\times(-21)-26\times(-17)=1 \end{cases}$$

d'où $21x-26y=21\times(-21)-26\times(-17)$

$\Leftrightarrow 21(x+21)=26(y+17)$

$21 \mid 21(x+21)$ d'où $21 \mid 26(y+17)$ or, $PGCD(26;21)=1$ } D'après le théorème de Gauss, $21 \mid y+17$

0,75

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ y+17=21k$

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ y=21k-17$

$26 \mid 26(y+17)$ d'où $26 \mid 21(x+21)$ or $PGCD(26;21)=1$ } D'après le théorème de Gauss, $26 \mid x+21$

$\Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z},\ x+21=26k'$

$\Leftrightarrow \exists k'\in\mathbb{Z},\ x=26k'-21$

Réciproquement :

$\cancel{21\times26}k'=\cancel{26\times21}k \Leftrightarrow k'=k.$

Donc :

$S=\{(26k-21;\ 21k-17),\ k\in\mathbb{Z}\}$ sont les solutions de (E).

d) on sait que $x=26k-21,\ k\in\mathbb{Z}$

$0\leq x\leq 25 \Leftrightarrow 0\leq 26k-21\leq 25$

$\Leftrightarrow 21\leq 26k\leq 46$

$\Leftrightarrow \dfrac{21}{26}\leq k\leq \dfrac{46}{26}$, d'où $k=1$ (car k est un entier)

$\dfrac{21}{26}\approx 0{,}81 \qquad \dfrac{46}{26}\approx 1{,}8$

Alors : $x = 26 \times 1 - 21 = 5$

et $y = 21 \times 1 - 17 = 4$ (0,25)

d'où le couple cherché est $\boxed{(5;4)}$

e) $5 = 26k - 21$

d'où $5 \times 21 = 26 \times 21k - 21 \times 21$ (0,25)

or, $26 \times 21k \equiv 0 [26]$ et $-21 \times 21 = -441 \equiv 1 [26]$

(car $-442 = 26 \times (-17) + 0$)

donc $\boxed{5 \times 21 \equiv 1 [26]}$

2) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\underline{12A - A^2} = 12\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 60 & 24 \\ 84 & 84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25+14 & 10+14 \\ 35+49 & 14+49 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 60 & 24 \\ 84 & 84 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 84 & 63 \end{pmatrix}$ (0,5)

$= \begin{pmatrix} 60-39 & 0 \\ 0 & 84-63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \underline{21 I_2}$

b)

$(12I - A) \times A = 21 I_2$ (0,25)

en posant : $\underline{B = 12I - A \text{ , alors } B \times A = 21 I_2}$

c) Supposons $AX = Y$

on sait que $B \times A = 21 I_2$, d'où $B \times \underbrace{A \times X}_{=Y} = 21 I_2 \times X = 21X$ (0,5)

donc $\underline{21X = BY}$

Partie C :

1) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = 5x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 7x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} 7y_1 = 35x_1 + 14x_2 \\ -5y_2 = -35x_1 - 35x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 35x_1 + 14x_2 = 7y_1 \\ -21x_2 = 7y_1 - 5y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 21x_2 = -7y_1 + 5y_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x_1 = -2\times\left[-\frac{7}{21}y_1+\frac{5}{21}y_2\right]+y_1 \\ 21x_2 = -7y_1+5y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}y_1-\frac{10}{21}y_2+y_1\right] \\ 21x_2 = -7y_1+5y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}\left[\frac{5}{3}y_1-\frac{10}{21}y_2\right] \\ 21x_2 = -7y_1+5y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x_1 = 21\times\frac{1}{3}y_1-21\times\frac{2}{21}y_2 \\ 21x_2 = -7y_1+5y_2 \end{cases}$$

0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x_1 = 7y_1-2y_2 \\ 21x_2 = -7y_1+5y_2 \end{cases}$$

2) $5\times 21x_1 = 35y_1-10y_2$

or, $5\times 21 \equiv 1\ [26]$ (question B) 1 e))

$35 \equiv 9\ [26]$ et $-10 \equiv 16\ [26]$

et $y_1 \equiv r_1\ [26]$, $y_2 \equiv r_2\ [26]$

d'où $x_1 \equiv 9r_1+16r_2\ [26]$

De même: $5\times 21x_2 = -35y_1+25y_2$ 0,75

or, $5\times 21 \equiv 1\ [26]$, $-35 \equiv 17\ [26]$

et $25 \equiv 25\ [26]$

$y_1 \equiv r_1\ [26]$ et $y_2 \equiv r_2\ [26]$

D'où $x_2 \equiv 17r_1+25r_2\ [26]$

Donc : $\begin{cases} x_1 \equiv 9r_1+16r_2\ [26] \\ x_2 \equiv 17r_1+25r_2\ [26] \end{cases}$

3) VLUP $\begin{pmatrix}21\\11\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$

$9\times r_1+16r_2 = 9\times 21+11\times 16 = 189+176 = 365$

or, $365 \equiv 1\ [26]$. Par transitivité de la relation de congruence,

$x_1 \equiv 1\ [26]$

d'où V sera déchiffré en B

5

$x_2 \equiv 17 \times 21 + 25 \times 11 \, [26]$

$\equiv 632 \, [26]$ – or, $632 \equiv 8 \, [26]$.

d'où $x_2 \equiv 8 \, [26]$ (par transitivité de la relation de congruence).

d'où L se déchiffre en I

UP:

0,5

$x_1 \equiv 9 \times 20 + 16 \times 15 \, [26]$

$\equiv 420 \, [26]$, or $420 \equiv 4 \, [26]$

d'où $x_1 \equiv 4 \, [26]$, d'où U se déchiffre en E

$x_2 \equiv 17 \times 20 + 25 \times 15 \, [26]$

$\equiv 715 \, [26]$, or $715 \equiv 13 \, [26]$

d'où $x_2 \equiv 13 \, [26]$, d'où P se déchiffre en M

Par conséquent:

VLUP est déchiffré en $\boxed{\text{BIEN}}$