TS

Correction du bac S (Faut le 22/06/18)

Sujet avec spécialité

1

Exercice 1 : $y = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x} - 2)$

1) Largeur = hauteur , $x > 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x} - 2)$

$\Leftrightarrow 4x = e^{x} + e^{-x} - 2$

$\Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} - 4x - 2 = 0 \quad (E)$

2) Sur $[0;+\infty[$: $f(x) = e^{x} + e^{-x} - 4x - 2$

a) Soit $x > 0$: $f(x) = x\left(\frac{e^{x}}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$, or, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - 2 = -2$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x}}{x} - 4\right) = +\infty$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, d'où par produit :

$x\left(\frac{e^{x}}{x} - 4\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3) a) $x \in [0;+\infty[$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} - 4 = 0$ (en multipliant à gauche et à droite par e^{x})

$\Leftrightarrow e^{x}(e^{x} - e^{-x} - 4) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 4e^{x} = 0$

c) Posons $X = e^x$

$$(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \iff X^2 - 4X - 1 = 0 \quad (E')$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20 > 0$$

(E') admet 2 solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$$

et $X_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-\sqrt{20}}{2} = 2-\sqrt{5}$

$X_1 = e^{x_1} \iff e^{x_1} = 2+\sqrt{5} > 0$

$\iff \ln e^{x_1} = \ln(2+\sqrt{5})$ (car si $a, b > 0$, $a = b \iff \ln a = \ln b$)

$\iff x_1 = \ln(2+\sqrt{5})$ (car $\ln e^x = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$X_2 = e^{x_2} = 2-\sqrt{5} < 0$ impossible, car $e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $f'(x) = 0$ admet une unique solution : $\ln(2+\sqrt{5})$

4) a) Tableau de variations de f :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de f	0	↘	$\simeq -3,3$	↗	$+\infty$

$\ln(2+\sqrt{5}) \simeq 1,44$

$f(0) = \cancel{e^0 + e^0} - 4\times 0 \cancel{-2}$
$= 0$

$f(\ln(2+\sqrt{5})) = e^{\ln(2+\sqrt{5})} + e^{-\ln(2+\sqrt{5})} - 4\ln(2+\sqrt{5}) - 2$

$= \cancel{2} + \sqrt{5} + \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} - 4\ln(2+\sqrt{5}) \cancel{-2}$

$= \sqrt{5} + \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} - 4\ln(2+\sqrt{5})$

$\simeq -3,3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (question 2b)

b) on a $f(0) = 0$ (On cherche une solution strictement positive)

$f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$ — f est une somme de fonctions continues

donc f est continue sur $[0;+\infty[$

D'après 4a), f est strictement croissante sur $[\ln(2+\sqrt{5}) ; +\infty[$

D'autre part, $f(\ln(2+\sqrt{5})) \simeq -3,3$

et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $0 \in [f(\ln(2+\sqrt{5})) ; \lim_{x\to+\infty} f(x)[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[\ln(2+\sqrt{5}) ; +\infty[$

5) a)

m	a	b	b − a	f(m)	condition f(m)>0
×	2	3	1		
2,5	2	2,5	1,5	≃0,265	Vrai
2,25	2,25	2,5	0,25	≃−1,407	Faux
2,375	2,375	2,5	0,125	≃−0,656	Faux
2,4375	2,4375	2,5	0,0625<0,1 (la condition du While plus vérifiée)	≃−0,218	Faux

A la fin de l'exécution, $a = 2,4375$ et $b = 2,5$

b) En fait, cet algorithme permet de résoudre l'équation $f(x)=0$ par dichotomie.

On obtient un encadrement de l'unique solution α strictement positive de cette équation. On sait que $\boxed{2,4375 < \alpha < 2,5}$ (encadrement à 10^{-1} près des)

6) $(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\times\frac{t}{39} - 2 = 0$

En posant $x = \frac{t}{39}$, $(E') \Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} - 4x - 2 = 0$

Or, d'après les questions précédentes, $f(x)=0$ admet une unique solution strictement positive α.

D'après 5a), on sait que $2,4375<\alpha<2,5$.

Comme $x=\frac{t}{39} \Leftrightarrow t=39x$

$$95,0625<39\alpha<97,5$$

or, hauteur $= 2\times 39\alpha$.

d'où $2\times 95,0625<$ hauteur $<2\times 97,5$

$\boxed{190,125< \text{hauteur} < 195}$ (en mètres)

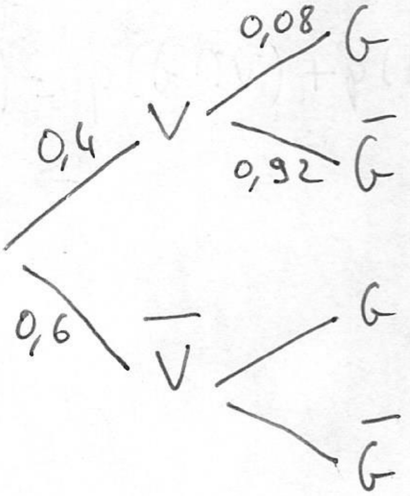
Exercice 2 :

Partie A :

1) a) G : "la personne a contracté la grippe"

D'après l'énoncé, $P(G)=\frac{20}{100}=\boxed{0,2}$

b)



2) $P(G\cap V)=P_V(G)\times P(V)=0,08\times 0,4=\boxed{0,032}$

3) $P(G)=P(G\cap V)+P(G\cap \bar{V})=P(G\cap V)+P_{\bar{V}}(G)\times P(\bar{V})$

c) $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P(G) - P(G \cap V)}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,2 - 0,032}{0,6} = \boxed{0,28}$

Partie B : (à 10^{-3} près pr les résultats)

$p = 0,4$ X : compte les pers. vaccinées parmi les n.

1) n tirages successifs indépendants, avec remise (= nous reproduisons donc n fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (il y a bien 2 issues à chaque fois → vaccinée (succès) ↘ pas vaccinée (échec))

probabilité de succès $= p = 0,4$

On peut donc modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli de paramètres $(n ; 0,4)$.

Comme X est la variable aléatoire qui compte les succès,

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0,4)$.

2) Ici $n = 40$:

a) $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times p^{15} \times (1-p)^{40-15}$

$= \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25}$

$\simeq \boxed{0,123}$ (probabilités que 15 personnes soient vaccinées parmi les 40 interrogées).

à la calculatrice

b) $P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19) \simeq 1 - 0,870$

$\simeq 0,130$

3) $n = 3750$ $Z = \dfrac{X - 1500}{30}$

Z suit $\mathcal{N}(0;1)$:

On a $P(1450 \leq X \leq 1550) = P(-50 \leq X - 1500 \leq 50)$

$$= P\left(-\frac{5}{3} \leq \frac{X-1500}{30} \leq \frac{5}{3}\right)$$

$$= P\left(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{5}{3}\right)$$

(A la calculatrice, comme on sait que Z suit $\mathcal{N}(0;1)$:)

$$\simeq 0{,}904$$

donc $P(1450 \leq X \leq 1550) \simeq 0{,}904$

Exercice 3 :

1) Dans le tétraèdre ABCE :

a) Hauteur issue de E : Elle est orthogonale au plan (ABC) et passe par E.

or, $(EA) \perp (AB)$ et $(EA) \perp (AC)$ $\Big\}$ (AB) et (AC) sécantes du plan (ABC)

donc (EA) est la hauteur issue de E du tétraèdre ABCE.

On raisonne de même pour la hauteur issue de C :

(CB) est la hauteur issue de C du tétraèdre ABCE.

b) (EA) et (CB) ne sont pas coplanaires.

Donc (EA) et (CB) ne sont pas sécantes.

Par conséquent : Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE ne sont pas concourantes.

2) Tétraèdre ACHF. Repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

a) Coordonnées de A : $A(0;0;0)$ (car c'est l'origine du repère)

Coordonnées de C : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

donc $C(1;1;0)$

Coordonnées de H : $\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{AE}$

donc $H(0;1;1)$

$x_A - y_A + z_A = 0 - 0 + 0 = 0,$

$x_C - y_C + z_C = 1 - 1 + 0 = 0$

$x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$

comme ces 3 points ne sont pas alignés, une équation cartésienne du plan (ACH) est donc bien :

$$\boxed{x - y + z = 0}$$

b) $\vec{AD} = 0\vec{AB} + 1\vec{AD} + 0\vec{AE}$, d'où D a pour coordonnées $(0;1;0)$

$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$, d'où F a pour coordonnées $(1;0;1)$

d'où $\vec{FD}(0-1; 1-0; 0-1)$

$(-1; 1; -1)$

or, $\vec{n}(1;-1;1)$ est un vecteur normal au plan (ACH)

on a $\vec{FD} = -\vec{n}$, donc $\vec{FD}$ est aussi un vecteur normal au plan (ACH)

Donc (FD) est bien la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

c) Par analogie avec le résultat de la question 2 b)

(AG), (CE) et (BH) sont les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.

En fait, les 4 hauteurs se coupent au centre du cube.

Donc : Les 4 hauteurs du tétraèdre ACHF sont bien concourantes.

Partie (B) :

1) a) (MK) est orthogonale au plan (NPQ) : elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan.

or, $(PQ) \subset (NPQ)$, donc (MK) et (PQ) sont orthogonales

De même, (PQ) et (NK) sont orthogonales.

b) (MK) et (NK) sont deux droites sécantes du plan (MNK)

or, d'après 1a) (PQ) est orthogonale à (MK) et à (NK)

donc (PQ) est orthogonale au plan (MNK)

2) D'après 1 b), (PQ) est orthogonale au plan (MNK) elle est donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan (MNK)

or, $(MN) \subset (MNK)$

d'où (PQ) et (MN) sont orthogonales

Donc : [MN] et [PQ] sont orthogonales

Partie (C) : $R(-3;5;2)$, $S(1;4;-2)$, $T(4;-1;5)$, $U(4;7;3)$

On a $\overrightarrow{RT}\,(x_T - x_S\,;\, y_T - y_S\,;\, z_T - z_S)$
$(7\,;\,-6\,;\,3)$

$\overrightarrow{SU}\,(x_U - x_S\,;\, y_U - y_S\,;\, z_U - z_S)$
$(3\,;\,3\,;\,5)$

d'où
$\overrightarrow{RT}.\overrightarrow{SU} = 7\times 3 + 3\times(-6) + 3\times 5$
$= 18 \neq 0$

Deux arêtes du tétraèdre ne sont pas orthogonales
Par contraposée de la propriété donnée à la fin de la partie B
le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.

Exercice 4 : $\boxed{\text{Spé}}$

Partie A :

$x^2 - 8y^2 = 1 \quad (E) \quad$ (où $(x,y) \in \mathbb{N}^2$)

1) Par exemple : si $x = 1$ et $y = 0$
alors : $x^2 - 8y^2 = 1^2 - 8\times 0^2 = 1$
d'où $(1\,;0)$ est un couple solution de (E)

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

a) * Initialisation : $(x_0\,;\,y_0)$ est bien une solution de (E)
(d'après la question 1))
donc la propriété est initialisée.

* Hérédité : On suppose que la propriété vraie jusqu'à un certain rang n. Montrons-la au rang $n+1$.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$$

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2$$
$$= 9x_n^2 + 48x_ny_n + 64y_n^2 - 8(x_n^2 + 6x_ny_n + 9y_n^2)$$

$= x_n^2 + \cancel{48 x_n y_n} + 64 y_n^2 - \cancel{48 x_n y_n} - 72 y_n^2$

$= x_n^2 - 8 y_n^2 = 1$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

d'où $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ solution de (E)

et comme $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$, d'où $(x_{n+1} ; y_{n+1}) \in \mathbb{N}^2$

La propriété est donc héréditaire

* Conclusion :

La propriété est initialisée et héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit : $(x_n ; y_n)$ solution de (E), pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) On suppose que $x_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$x_{n+1} - x_n = 3x_n + 8y_n - x_n = 2x_n + 8y_n$

or, (y_n) suite d'entiers naturels, d'où $y_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

donc $x_{n+1} - x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) D'après 2b), (x_n) strictement croissante dont les termes sont des entiers naturels non nuls, deux à deux distincts.

Donc (E) admet une infinité de couples solutions $(x_n ; y_n)$

Partie (B) :

$n \in \mathbb{N}$ est dit puissant si : Pour tout diviseur premier p de n, $p^2 | n$

1) * Si $n = 8$: $n = 2^3$ _ Seul diviseur premier de $n = 2$.

or, $2^2 | 8$ donc 8 est puissant.

* Si $n = 9$: $9 = 3^2$. Seul diviseur premier de $9 = 3$

or, $3^2 \mid 9$ donc 9 est puissant

8 et 9 sont bien deux entiers naturels consécutifs.

2) $(a, b) \in \mathbb{N}^2$

$n = a^2 b^3$ Les diviseurs premiers de n sont ceux de a et de b.

* Soit p_1 un diviseur premier de a :

$p_1 \mid a \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N},\ a = p_1 \times k_1$

d'où $n = p_1^2 \times \underbrace{k_1^2 \times b^3}_{\in \mathbb{N}}$ donc $p_1^2 \mid n$

* Soit p_2 un diviseur premier de b :

$p_2 \mid b \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N},\ b = p_2 \times k_2$

d'où $n = a^2 \times p_2^3 \times k_2^3 = p_2^2 \times \underbrace{p_2 \times a^2 \times k_2^3}_{\in \mathbb{N}}$

donc $p_2^2 \mid n$

Par conséquent : n est un entier naturel puissant

3) Soit $(x ; y)$ solution de (E)

$x^2 - 8y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8y^2 = y^2 \times 2^3$, avec $y \in \mathbb{N}$

D'après la question 2), $x^2 - 1$ est un entier puissant

Soit p un diviseur premier de x^2 : alors $p \mid x$ (corollaire du théorème de Gauss).

(Si $p \mid ab$, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$)
premier

d'où : $\exists k \in \mathbb{N},\ x = pk$

d'où $x^2 = p^2 \underbrace{k^2}_{\in \mathbb{N}}$, donc $p^2 \mid x^2$

Autrement dit : x^2 est un entier puissant

De plus, x^2-1 et x^2 sont bien 2 entiers consécutifs.

Par conséquent : x^2-1 et x^2 sont deux entiers consécutifs puissants.

4) D'après la question A3), il existe une infinité de couples solutions de (E).

Or, d'après la question B3), si $(x;y)$ est un couple solution de (E) on peut construire deux entiers naturels consécutifs puissants : x^2-1 et x^2

Donc il existe bien une infinité de couples d'entiers naturels puissants consécutifs.

on sait que : $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \\ x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

$x_2 = 17$, $y_2 = 6$ (à la calculatrice) mais $x_2^2 = 17^2 = 289 < 2018$.

on va prendre $x_3 = 99$ et $y_3 = 35$, $x_3^2 = 99^2 = 9801 > 2018$

et $x_3^2 - 1 = 9800 > 2018$

donc : 9800 et 9801 sont 2 entiers naturels consécutifs puissants.

Exercice 4 : $\boxed{\text{Non Spé}}$

$\begin{cases} z_{n+1} = \dfrac{3-i\sqrt{3}}{4} z_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ z_0 = 8 \end{cases}$

1)a) $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\times\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

Donc $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

b) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_0 = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = \underline{4\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

$z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \underline{6 \times e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

$z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 6 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= 3\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6} - i\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6} - \frac{2i\pi}{6}} = \underline{3\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

$= 3\sqrt{3}\left(\underbrace{\cancel{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}_{0} + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \underline{-3\sqrt{3}\, i}$

donc z_3 est imaginaire pur

avec $\mathrm{Im}(z_3) = \underline{-3\sqrt{3}}$

c) Voir représentation graphique.

2) a) Par récurrence :

* Initialisation : $z_0 = 8$

et $8 \times \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0}_{=1} e^{-i \times \frac{0\pi}{6}} = 8 \underbrace{e^0}_{=1} = 8 = z_0$, d'où la propriété est initialisée.

* Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons-la au rang $n+1$.

$z_{n+1} = \dfrac{3-i\sqrt{3}}{4} z_n = \dfrac{3-i\sqrt{3}}{4} \times 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ (hypothèse de récurrence)

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 8 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ (d'après 1a)) d'où $z_{n+1} = 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{-i\frac{n\pi}{6}}$

$= 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$, donc la propriété est héréditaire.

* Conclusion : La propriété a été initialisée, elle est aussi héréditaire. Donc, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autrement dit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n} e^{-i\frac{n\pi}{6}}$

b) $u_n = |z_n|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_n = \left|8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n} e^{-i\frac{n\pi}{6}}\right| = 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$, car $|e^{i\theta}| = 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(car $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n} = 0$

Par produit, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} e^{-i\frac{(k+1)\pi}{6}} - 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k} e^{-i\frac{k\pi}{6}}}{8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} e^{-i\frac{(k+1)\pi}{6}}}$$

$$= \frac{\cancel{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k} e^{-i\frac{k\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1\right)}{\cancel{8}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} e^{-i\frac{(k+1)\pi}{6}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} i$$

donc $\boxed{\dfrac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} i}$

$A_k A_{k+1} = |z_{k+1} - z_k|$

or, d'après le calcul précédent, $z_{k+1} - z_k = z_{k+1} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} i\right)$

d'où $|z_{k+1} - z_k| = |z_{k+1}| \times \left|-\frac{1}{\sqrt{3}} i\right|$

$$= |z_{k+1}| \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

or, $|z_{k+1}| = OA_{k+1}$

Donc : $\boxed{A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times OA_{k+1}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$

b) $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times OA_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} OA_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{3}} \times OA_n$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} u_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} u_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{3}} u_n$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$, or (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de 1er terme $u_0 = 8$

(question 2 b))

Alors : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= |z_1| \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 4\sqrt{3} \times \frac{2}{2-\sqrt{3}} \left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$$

Donc : $P_n = \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \dfrac{8\cancel{\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}} \left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}} \left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

or, $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$

d'où $\dfrac{8}{2-\sqrt{3}} \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$

Donc (P_n) est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}}$$