

(1)

Partie (A):

1) a) Restes modulo 5:

$x \equiv$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1

(0,25)

b) Soit $x \in \mathbb{Z}$, tels que: $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$

D'après le tableau du 1a):

$x^2 + x \equiv$	0	2	1	2	0
$x^2 + x + 3 \equiv$	3	0	4	0	3

(0,5)

D'après le tableau, $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si $x \equiv 1[5]$ ou $x \equiv 3[5]$

Alors: $x = 5k + 1$ ou $5k + 3$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Donc: $S = \{5k + 1 \text{ ou } 5k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$

2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.
Raisonnons par récurrence:

* Initialisation:

$$\begin{aligned} \text{Pour } n=1: \quad 5^{6 \times 1 + 1} + 2^{3 \times 1 + 1} &= 5^7 + 2^4 \\ &= 78125 + 16 \\ &= 78141 \end{aligned}$$

(0,5)

$$\text{or, } 78141 = 7 \times 11163$$

$$\text{d'où } 5^{6 \times 1 + 1} + 2^{3 \times 1 + 1} = 7 \times \underbrace{11163}_{\in \mathbb{Z}} \text{ d'où la prop. est initialisée}$$

* Hérédité: Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang n .

$$5^{6(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 5^{6n+7} + 2^{3n+4} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 &= 5^6 \times (5^{6n+1} + 2^{3n+1}) \\
 &\quad - 5^6 \times 2^{3n+1} + 2^{3n+4} \\
 &= 5^6 \times 7k - 2^{3n+1} (5^6 - 2^3) \\
 &\quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \quad \text{R67} \\
 &= 5^6 \times 7k - 2^{3n+1} \times 15617 \\
 &= 5^6 \times 7k - 2^{3n+1} \times 7 \times 2231 \\
 &= 7 (5^6 \times k - 2^{3n+1} \times 2231)
 \end{aligned}$$

D'où la propriété est héréditaire. e78

Par le principe de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7

3) a) $4^3 = 64$ ~~est divisible par 7~~ (0,25)

$64 - 1 = 63 \equiv 0 [7]$ car $63 = 9 \times 7 + 0$

Nous $\boxed{4^3 \equiv 1 [7]}$

b) $2018 = 3 \times 672 + 2$

$18^{2018} = 18^{3 \times 672 + 2}$

$18 \equiv 4 [7]$

d'où $18^{3 \times 672 + 2} \equiv 4^{3 \times 672 + 2} [7]$

(car si $a \equiv b [n]$, alors $a^p \equiv b^p [n]$, pour tout $p \in \mathbb{N}$). (0,75)

Or: $4^{3 \times 672 + 2} = (4^3)^{672} \times 4^2$ et $4^3 \equiv 1 [7]$

d'où $(4^3)^{672} \equiv 1 [7]$

Puis: $(4^3)^{672} \times 4^2 \equiv 16 [7]$
 $\equiv 2 [7]$.

Donc: $18^{2018} \equiv 2 [7]$ donc 2 est le reste dans la division euclidienne de 18^{2018} par 7.

Partie (B):

3

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$A(1; \frac{3}{2}), B(-1; -\frac{5}{2}), C(2; \frac{1}{2})$$

$$1) \text{ On a: } f(1) = \frac{3}{2} \quad \left| \quad f(-1) = -\frac{5}{2} \right.$$

$$\Leftrightarrow \underline{a + b + c = \frac{3}{2}} \quad \left| \quad \underline{a - b + c = -\frac{5}{2}} \right.$$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{4a + 2b + c = \frac{1}{2}}$$

En posant: $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases}$

Donc 3 systèmes suivent:

0,25

$$(S) \begin{cases} x + y + z = \frac{3}{2} \\ x - y + z = -\frac{5}{2} \\ 4x + 2y + z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1) X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$AX = B$, en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

0,25

$$2) AX = B$$

$$\Leftrightarrow \underline{A^{-1}AX = A^{-1} \times B}$$

0,25

$$\Leftrightarrow \underline{X = A^{-1} \times B}$$

$$3) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 4 & 2 & 3 \\ 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 4 & 4 & 1 \\ 4 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

0,25

$$\underline{A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$A^2 + 8A + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

or, à la calculatrice:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

Donc: $A^3 = A^2 + 8A + 6I$

5) $A^3 - A^2 - 8A = 6I$

$\Leftrightarrow A(A^2 - A - 8I) = 6I$

$\Leftrightarrow A \left[\frac{1}{6}(A^2 - A - 8I) \right] = I$

6) On a $A \times B = I$, avec $B = \frac{1}{6}(A^2 - A - 8I)$

Donc: A est inversible et $A^{-1} = B = \frac{1}{6}(A^2 - A - 8I)$

7) $A^{-1} = \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \right]$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

or, $X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \times (-\frac{9}{2}) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{9}{2}) = 2 \\ z = 1 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times (-\frac{9}{2}) + (-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{12} - \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = -1 \\ y = 2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}}$