

Exercice (1): (5)

1) Test de primalité:

$$\sqrt{199} \approx 14,1. \text{ Nombres premiers } \leq \sqrt{199} : \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$$

* 199 étant impair : il n'est donc pas divisible par 2.

* $1+9+9=19$ et $3 \nmid 19$ } d'où 199 n'est pas divisible par 3

* 199 ne se termine ni par 0, ni par 5, donc $5 \nmid 199$

* $199 = 28 \times 7 + 3$, d'où $7 \nmid 199$

* $199 = 11 \times 18 + 1$, d'où $11 \nmid 199$

* $199 = 13 \times 15 + 4$, d'où $13 \nmid 199$

Donc aucun entier naturel premier inférieur à $\sqrt{199}$ ne divise 199

Par conséquent : 199 est un nombre premier.

(2)

2) $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

Supposons que $ab \equiv 0 [199]$:

$$ab \equiv 0 [199] \Leftrightarrow 199 \mid ab$$

* Soit $199 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 [199]$

(2)

* Soit $199 \nmid a$:

or, d'après 1), on sait que 199 est un nombre premier

d'où $\text{PGCD}(199, a) = 1$ } d'après le théorème de Gauss,
comme $199 \mid ab$ $199 \mid b \Leftrightarrow b \equiv 0 [199]$

Donc : $ab \equiv 0 [199] \Rightarrow a \equiv 0 [199] \text{ ou } b \equiv 0 [199]$

3) $a \in \mathbb{N}$:

199 étant un nombre premier,

d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, $a^{199} \equiv a \pmod{199}$

(1)

$$\Leftrightarrow 199 \mid a^{199} - a$$

Exercice (2):

45

* Déterminons la décomposition de 300 en produit de facteurs premiers:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad , \text{ d'où } 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

45

* Utilisons un arbre pour obtenir la liste de tous les diviseurs positifs de 300:

Il y a $3 \times 2 \times 3 = 18$ diviseurs positifs de 300

Liste des diviseurs positifs de 300:

$$\left\{ 1; 5; 25; 3; 15; 75; 2; 10; 50; 6; 30; 150; 4; 20; 100; 12; 60; 300 \right\}$$

En les rangeant dans l'ordre croissant:

$$\left\{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 25; 30; 50; 60; 75; 100; 150; 300 \right\}$$

45

Exercice (3):

10,5

$$(E): 11x - 4y = 5, \quad (x; y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$1) \text{ PGCD}(11; 4) = 1 \text{ (nombres premiers entre eux) et } 1 \mid 5$$

(1)

Donc (E) admet des solutions entières

(3)

2) $(E_0): 11x - 7y = 1$

Algorithme d'Euclide:

a	b	Reste
11	7	4
7	4	3
4	3	1
3	1	0

$$11 = 4 \times 1 + 4, \text{ avec } 0 \leq 4 < 7$$

$$7 = 4 \times 1 + 3, \text{ avec } 0 \leq 3 < 4$$

$$4 = 3 \times 1 + 1, \text{ avec } 0 \leq 1 < 3$$

$$3 = 1 \times 3 + 0, \text{ avec } 0 \leq 0 < 1$$

(2,5)

On a alors: $1 = 4 - 3 \times 1$

$$= 4 - (7 - 4 \times 1) \times 1$$

$$= 11 - 7 \times 1 - (7 - (11 - 7 \times 1))$$

$$= 11 \times 2 - 7 - 7 - 7$$

$$1 = 11 \times 2 - 7 \times 3$$

D'où $(2; 3)$ est une solution particulière de (E_0)

3) $(2; 3)$ étant une solution particulière de (E_0) ,

$(2 \times 5; 3 \times 5)$ est une solution particulière de (E)
10 15

soit $(x; y)$ une solution de (E) :

$$\begin{cases} 11x - 7y = 5 \\ 11 \times 10 - 7 \times 15 = 5 \end{cases}$$

$$11x - 7y = 11 \times 10 - 7 \times 15$$

$$\Leftrightarrow 11(x - 10) = 7(y - 15)$$

$$11 | 11(x - 10) \text{ d'où } 11 | 7(y - 15), \text{ or } \text{PGCD}(11; 7) = 1,$$

D'après le théorème de Gauss, $11 \mid y-15$

(4)

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y-15 = 11k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = 11k + 15$$

De même:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid 7(y-15), \text{ d'où } 7 \mid 11(x-10) \\ \text{avec PGCD}(11, 7) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d'après le théorème de} \\ \text{Gauss,} \\ 7 \mid x-10 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x-10 = 7k'$$

$$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, x = 7k' + 10$$

Réciproquement:

(4)

$$11 \times 7k' = 7 \times 11k$$

$$\Leftrightarrow k' = k$$

Donc les solutions de (E) sont données par:

$$S = \{ (7k+10; 11k+15), k \in \mathbb{Z} \}$$

4) (D): $11x - 7y - 5 = 0$

$$F = \{ M(x; y) \in S \mid 0 \leq x \leq 50 \text{ et } 0 \leq y \leq 50 \}$$

a) $11x - 7y - 5 = 0 \Leftrightarrow 11x - 7y = 5$

or, d'après les questions précédentes, les solutions sont de la forme

$$(7k+10; 11k+15), \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq 7k+10 \leq 50 \Leftrightarrow -10 \leq 7k \leq 40$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{10}{7}}_{\approx -1,4} \leq k \leq \frac{40}{7} \approx 5,7$$

(15)

$$\text{et } 0 \leq 11k+15 \leq 50 \Leftrightarrow -15 \leq 11k \leq 35 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{15}{11}}_{\approx -1,4} \leq k \leq \frac{35}{11} \approx 3,2$$

Finalement: k étant un entier,

$$k \in \{-1; 0; 1; 2; 3\} \quad (0,25)$$

Il y a donc 5 points à coordonnées entières qui appartiennent à Γ

b) * Pour $k = -1$: $(x; y) = (7 \times (-1) + 10; 11 \times (-1) + 19)$
 $= (3; 4)$

* Pour $k = 0$: $(x; y) = (10; 19)$

* Pour $k = 1$: $(x; y) = (7 + 10; 11 + 19)$
 $= (17; 26)$

$$(1,25) (= 5 \times 0,25)$$

* Pour $k = 2$: $(x; y) = (7 \times 2 + 10; 11 \times 2 + 19)$
 $= (24; 37)$

* Pour $k = 3$: $(x; y) = (7 \times 3 + 10; 11 \times 3 + 19)$
 $= (31; 48)$