

Spécialité Maths TS	<u>Camille</u> Devoir n°1 : Divisibilité/Division euclidienne	<u>Paul h.</u> Lundi 09 octobre 2017
---------------------	--	--

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE :

Exercice 1 :

4

Total/20

Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $5 \mid 3^{2n} - 4^n$

* Initialisation : $3^{2 \times 0} - 4^0 = 3^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ et $5 \mid 0$. La propriété est initialisée.

①

* Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang n .

Alors $3^{2n} - 4^n = 5k$, avec $k \in \mathbb{N}$. $3^{2(n+1)} - 4^{n+1} = 3^2 \times 3^{2n} - 4 \times 4^n$

③

$$= 9 \times (3^{2n} - 4^n) + 9 \times 4^n - 4^{n+1}$$

Exercice 2 :

3

$$= 9 \times (3^{2n} - 4^n) + 4^n \times (9 - 4) = 5k' \text{ avec } k' \in \mathbb{N} \text{ la propriété est donc héritée}$$

On considère en base 10 le nombre 487. Ecrire en base 3 ce nombre en détaillant les calculs.

$$487 = 3 \times 162 + 1$$

$$= 3 \times (3 \times 54) + 1$$

$$= 3 \times (3 \times (3 \times 2) + 1) + 1$$

$$= 3^3 \times 2 + 3^0 \times 1$$

$$= 2 \times 3^3 + 0 \times 3^4 + 0 \times 3^5 + 0 \times 3^6 + 0 \times 3^7 + 1 \times 3^0$$

$$487 \text{ en Base } 3 : \underline{200001}$$

Exercice 3 :

5

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $5n + 3 \mid 7n - 1$

$$\left. \begin{array}{l} 5n+3 \mid 5n+3 \\ \text{et } 5n+3 \mid 7n-1 \end{array} \right\} \text{d'où } 5n+3 \text{ divise toute}$$

combinaison linéaire à coefficients entiers de $5n+3$ et $7n-1$

$$5n+3 \mid (7(5n+3) - 5(7n-1)) = 26 \quad \text{Or, } n \in \mathbb{N}, \text{ d'où } 5n+3 \in \mathbb{N}$$

Diviseurs de 26 dans $\mathbb{N} = \{1; 2; 13; 26\}$

Par disjonction des cas :

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} 5n+3=1 \quad \textcircled{2} 5n+3=2 \quad \textcircled{3} 5n+3=13 \quad \textcircled{4} 5n+3=26 \\ \Leftrightarrow n=-\frac{2}{5} \notin \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow n=-\frac{1}{5} \notin \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow n=\frac{10}{5}=2 \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow n=\frac{23}{5} \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Vérification : $5 \times 2 + 3 = 13$ $7 \times 2 - 1 = 13$ et $13 \mid 13$

Par conséquent : $S = \{2\}$

Exercice 4 :

Résoudre dans les entiers relatifs l'équation suivante : $64x^2 = 9y^2 + 13 \Leftrightarrow 64x^2 - 9y^2 = 13$

Diviseurs de 13 dans $\mathbb{Z} = \{1; -1; 13; -13\}$

Par disjonction des cas :

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \begin{cases} 8x-3y=1 \\ 8x+3y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-3y=1 \\ -6y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=7 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z} \\ y=2 \end{cases} \\ \textcircled{2} \begin{cases} 8x-3y=13 \\ 8x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-3y=13 \\ -6y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=13-6 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z} \\ y=-2 \end{cases} \\ \textcircled{3} \begin{cases} 8x-3y=-1 \\ 8x+3y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-3y=-1 \\ -6y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=-1-6 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z} \\ y=-2 \end{cases} \\ \textcircled{4} \begin{cases} 8x-3y=-13 \\ 8x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-3y=-13 \\ -6y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=-13+6 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z} \\ y=2 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5 :

1) Montrer que pour tout n , entier naturel, $5n^2 + 3n - 2 = (5n+2)(n-1) + 6n$ (E)

$$\begin{aligned} (5n+2)(n-1) + 6n &= 5n^2 - 5n + 2n - 2 + 6n \\ &= 5n^2 + 3n - 2 \end{aligned}$$

2) Pour quelles valeurs de n , (E) traduit la division euclidienne de $5n^2 + 3n - 2$ par $5n+2$?

$$5n^2 + 3n - 2 = (5n+2)(n-1) + 6n, \text{ avec } 0 \leq 6n < 5n+2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n < 2$$

115

Donc (E) traduit la division euclidienne de $5n^2 + 3n - 2$ par $5n+2$ si et seulement si $n=0$ ou $n=1$.

3) Pour quelles valeurs de n , (E) traduit la division euclidienne de $5n^2 + 3n - 2$ par $n-1$?

$$5n^2 + 3n - 2 = (5n+2)(n-1) + 6n, \text{ avec } 0 \leq 6n < n-1$$

$$\Leftrightarrow 5n < -1$$

$$\Leftrightarrow n < -\frac{1}{5}$$

impossible, car $n \in \mathbb{N}$

115