

1) a) $\begin{cases} u_0 = 400 & : \text{nombre d'animaux jeunes au démarrage de l'expérience} \\ v_0 = 100 & : \text{nombre d'animaux vieux au démarrage de l'expérience} \end{cases}$

u_1 : nombre d'animaux jeunes à l'année de rang 1
taux de natalité de 200% pour les vieux

$$u_1 = \underbrace{\frac{50}{100} u_0}_{\substack{\text{car 50\% des} \\ \text{jeunes passent} \\ \text{à la classe des} \\ \text{vieux}}} - \underbrace{\frac{29}{100} u_0}_{\substack{\text{car 29\%} \\ \text{des jeunes} \\ \text{meurent} \\ \text{d'une année} \\ \text{à l'autre}}} + \underbrace{2 \times v_0}_{\substack{\text{les chameaux} \\ \text{supplémentaires}}} + 20$$

d'où $u_1 = \frac{1}{4} \times 400 + 2 \times 100 + 20 = \underline{320}$

v_1 : nombre d'animaux vieux à l'année de rang 1.
les 75% des vieux de l'année d'avant qui meurent

$$v_1 = v_0 + \underbrace{\frac{50}{100} \times u_0}_{\substack{\text{les 50\% des jeunes} \\ \text{de l'année précédente} \\ \text{qui passent à la classe} \\ \text{des vieux}}} - \underbrace{\frac{75}{100} \times v_0}_{\substack{\text{les 75\% des vieux de l'année d'avant} \\ \text{qui meurent}}}$$

$$= \frac{1}{4} \times 100 + \frac{1}{2} \times 400 = 25 + 200 = \underline{225}$$

b) Soit n ∈ ℕ :

$$u_{n+1} = \frac{50}{100} \times u_n - \frac{29}{100} \times u_n + 2 \times v_n + 20$$

Donc $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 2 v_n + 20$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{75}{100} \times v_n$$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4} v_n$

2) $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} u_n + 2 v_n \\ \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4} v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc: } U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A U_n + B$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3) a) I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det E = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = \frac{9}{16} - \frac{16}{16} = -\frac{7}{16} \neq 0$$

d'où E est inversible.

$$(\text{si } E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, E^{-1} = \frac{1}{\det E} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix})$$

$$\underline{E^{-1} = -\frac{16}{7} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} & -\frac{32}{7} \\ -\frac{8}{7} & -\frac{12}{7} \end{pmatrix} = -\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$b) C = AC + B \Leftrightarrow (I_2 - A) \times C = B$$

$$\Leftrightarrow E \times C = B$$

$$\Leftrightarrow C = E^{-1} \times B$$

$$= -\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3 \times 20 + 8 \times 0 \\ 2 \times 20 + 3 \times 0 \end{pmatrix} = \underline{-\frac{4}{7} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}}$$

$$4) \text{ Soit } m \in \mathbb{N}: V_m = U_m - C$$

$$\underline{V_{m+1}} = U_{m+1} - C = AU_m + B - C$$

$$= AU_m + B - (AC + B)$$

$$= AU_m + \cancel{B} - AC - \cancel{B} = A(U_m - C) = \underline{A \times V_m}$$

$$5) P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \det P = 2 \times (-1) - 1 \times 2 = -4 \neq 0 \text{ d'où } P \text{ est inversible}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 P^{-1} \times A \times P &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2 & \frac{1}{2} - 2 \\ 1 + \frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \times (-\frac{3}{2}) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \times (-\frac{3}{2}) - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = D \quad (\text{matrice diagonale})
 \end{aligned}$$

6) $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = A$
on montre par récurrence que $A^m = PD^mP^{-1}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$
or, $D^m = \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^m & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^m \end{pmatrix}$

d'où $A^m = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^m & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^m \end{pmatrix} \times (-\frac{1}{4}) \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times (\frac{5}{4})^m & 2 \times (-\frac{3}{4})^m \\ (\frac{5}{4})^m & -(-\frac{3}{4})^m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $A^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{5}{4})^m + \frac{1}{2} \times (-\frac{3}{4})^m & (\frac{5}{4})^m - (-\frac{3}{4})^m \\ \frac{1}{4} \times (\frac{5}{4})^m - \frac{1}{4} \times (-\frac{3}{4})^m & \frac{1}{2} \times (\frac{5}{4})^m + \frac{1}{2} \times (-\frac{3}{4})^m \end{pmatrix}$

7) a) $V_{n+1} = A \times V_n$

on montre par récurrence que $V_n = A^n \times V_0$

$$\begin{aligned}
 V_0 = U_0 - C &= \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 + \frac{240}{7} \\ 100 + \frac{160}{7} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2800}{7} + \frac{240}{7} \\ \frac{700}{7} + \frac{160}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{860}{7} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 V_n &= A^n \times V_0 \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n & \left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{1}{4} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n & \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3040}{7} \\ \frac{860}{7} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1520}{7} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{1520}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + \frac{860}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] \\ \frac{760}{7} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n - \frac{760}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n + \frac{430}{7} \times \left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{430}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1520}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] + \frac{860}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] \\ \frac{760}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] + \frac{430}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

b) $V_n = U_n - C \Leftrightarrow U_n = V_n + C$.

$$\Leftrightarrow U_n = \begin{pmatrix} \frac{1520}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] + \frac{860}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] - \frac{240}{7} \\ \frac{760}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] + \frac{430}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] - \frac{160}{7} \end{pmatrix}$$

c) or, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

d'au $u_n = \frac{1520}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] + \frac{860}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] - \frac{240}{7}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{760}{7} \times \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] + \frac{430}{7} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}\right)^n \right] - \frac{160}{7}$$

8) a) $\frac{5}{4} > 1$, d'au $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$
 $-\frac{3}{4} \in]-1; 1[$, d'au $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$

d'au $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

b) $w_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{5}{4}^n \left[\frac{1520}{7} + \frac{860}{7} + \frac{1520}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{860}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{240}{7} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \right]}{\frac{5}{4}^n \left[\frac{760}{7} + \frac{430}{7} - \frac{760}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{430}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{160}{7} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \right]}$

$$-1 < -\frac{3}{4} < 1, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

$$0 < \frac{4}{5} < 1, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{d'où } \left(\frac{1920}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{860}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{240}{7} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left(-\frac{760}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{430}{7} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{160}{7} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \frac{\frac{1920+860}{7}}{\frac{760+430}{7}} = \frac{2380}{1190} = 2$$

Donc, à long terme, le nombre de jeunes chamois sera le double du nombre de "vieux" chamois.