

Applications des congruences + récurrence.

1

Exercice (1): Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $5 \mid 16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$

Par récurrence:

* Initialisation:

$$\text{— Par } n=0: 16 \times 7^{2 \times 0} - 28 \times 3^{2 \times 0 + 3} = 16 - 28 \times 3^3$$

$$= -740 \text{ et } 5 \mid -740$$

d'où la propriété est initialisée

* Hérité: On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
 Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$

$$\text{On a: } 16 \times 7^{2(n+1)} - 28 \times 3^{2(n+1)+3} = 16 \times 7^{2n} \times 7^2 - 28 \times 3^{2n+3} \times 3^2$$

$$= 49 \times 16 \times 7^{2n} - 9 \times 28 \times 3^{2n+3}$$

$$= 49(16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}) + 40 \times 28 \times 3^{2n+3}$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence, $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3} = 5k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{d'où: } 16 \times 7^{2(n+1)} - 28 \times 3^{2(n+1)+3} = 49 \times 5k + 40 \times 28 \times 3^{2n+3}$$

$$= 49 \times 5k + 5 \times 8 \times 28 \times 3^{2n+3}$$

$$= 5(49k + 8 \times 28 \times 3^{2n+3})$$

d'est-à-dire: $\in \mathbb{Z}$

$$5 \mid 16 \times 7^{2(n+1)} - 28 \times 3^{2(n+1)+3}$$

d'où la propriété est héréditaire

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc: $5 \mid 16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice (2): Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n n'est pas divisible par 3, alors $9 \mid n^6 - 1$. (2)

On raisonne à l'aide de congruences.

Tableau des restes modulo 9:

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^6 \equiv$	0	1	1	0	1	1	0	1	1
$n^6 - 1 \equiv$	8	0	0	8	0	0	8	0	0

* Si $n \equiv 0[9]$, alors $n \equiv 0[3]$ et dans ce cas $n^6 - 1 \equiv 8[9]$

* Si $n \equiv 3[9]$, $9 \mid n-3 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n-3 = 9k$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n &= 9k + 3 \\ &= 3(\underbrace{3k+1}_{\in \mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

d'où $n \equiv 0[3]$ et on a $9 \nmid n^6 - 1$

* Si $n \equiv 6[9]$, $9 \mid n-6 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n-6 = 9k$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 9k + 6$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3(\underbrace{3k+2}_{\in \mathbb{Z}})$$

d'où $n \equiv 0[3]$ et on a $9 \nmid n^6 - 1$

Dans tous les autres cas:

$$n^6 - 1 \equiv 0[9] \text{ c'est-à-dire } 9 \mid n^6 - 1.$$

En raisonnant par contraposée:

Si $n \not\equiv 0[3]$, alors $n \not\equiv 0[9]$
et $n \not\equiv 3[9]$
et $n \not\equiv 6[9]$.

D'où $n \equiv 1$ ou 2 ou 4 ou 5 ou 7 ou $8[9]$

Par conséquent:

si $3 \nmid n$, alors $9 \mid n^6 - 1$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice (3): Soit $n \in \mathbb{N}$.

(3)

Si n n'est pas divisible par 5, alors $5 \mid (n^2-1)(n^2-4)$.

Restes modulo 5:

$n \equiv$	$\emptyset$	1	2	3	4
$n^2 \equiv$	$\emptyset$	1	4	4	1
$n^2-1 \equiv$	$\emptyset$	0	3	3	0
$n^2-4 \equiv$	$\emptyset$	2	0	0	2
$(n^2-1)(n^2-4) \equiv$	$\emptyset$	0	0	0	0

Comme n n'est pas divisible par 5,
 $n \not\equiv 0[5]$.

Pour remplir le tableau, on utilise les propriétés des congruences.

(si $a \equiv b[n]$, alors $a^p \equiv b^p[n]$
pour tout $p \in \mathbb{N}$)

$a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$
alors $a+c \equiv b+d[n]$
et $a \times c \equiv b \times d[n]$.

Dans tous les cas: $(n^2-1)(n^2-4) \equiv 0[5]$

Donc: si $5 \nmid n$, alors $5 \mid (n^2-1)(n^2-4)$.