Terminale S (Spécialité mathématiques)	**Exercice pour le bac blanc**	Avril 2017

Partie A :

On considère les matrices M de la forme M = $\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres entiers.

1) Dans cette question, on suppose que det (M) ≠ 0 et on pose :
   N = $\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$. Justifier que N est l'inverse de M.

2) On considère l'équation (E) : det (M) = 3. On souhaite déterminer tous les couples d'entiers (a ;b) solutions de (E)
   a) Vérifier que le couple (6 ;3) est une solution de (E)
   b) Montrer que le couple d'entiers (a ; b) est solution de (E) si et seulement si 3(a - 6) = 5(b – 3)
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E)

Partie B :

1) On pose Q = $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q
2) ***Codage avec la matrice Q :***
   Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice Q = $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, on utilise la procédure qui suit :

   ETAPE 1 : On associe au mot la matrice X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 et x_2 correspondent respectivement à la première lettre du mot et à la deuxième selon le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

U	V	W	X	Y	Z
20	21	22	23	24	25

ETAPE 2 : La matrice X est transformée en la matrice Y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que Y = QX

ETAPE 3 : La matrice Y est transformée en la matrice R = $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

ETAPE 4 : A la matrice R = $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1

Coder le mot DO

3) <u>Procédure de décodage :</u>

On conserve les mêmes notations que pour le codage. Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que : Y = QX

a) Démontrer que 3X = $3Q^{-1}$Y, puis que :

$$\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}$$

b) En remarquant que 9×3 ≡ 1 [26], montrer que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$$

c) Décoder le mot SG