<u>Exercice de spécialité</u>

*Cet exercice comporte deux parties **indépendantes**.*

<u>Partie A</u>

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3
   b) Quel conjecture peut-on émettre concernant l'écriture décimale de u_n ?
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$
3) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une preuve de la conjecture faite en 1b)
4) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n\ [11]$
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11.

<u>Partie B</u>

Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1) Calculer Tr(A) en justifiant
2) Déterminer A^T
3) Calculer A^2 **<u>en justifiant soigneusement</u>**

<u>On propose une autre méthode pour obtenir A^2</u>

4) a) Montrer que $A = P + I_3$,où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 et P , une matrice carrée d'ordre 3 telle que $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   b) **<u>En déduire</u>** la matrice A^2